Exercices sur les espaces vectoriels normés

1. Montrer que l'adhérence d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé E est un sous-espace vectoriel de E.

2. Si E est un espace vectoriel normé, montrer que tout sous-espace vectoriel strict de E est d'intérieur vide.

3. Si C est une partie convexe d'un espace vectoriel normé E, montrer que son adhérence et son intérieur sont convexes.

4. Soit E est un espace vectoriel normé. On pose pour $a \in E$ et $r > 0$ l'ensemble $B_F(a, r)$ la boule fermé de centre a et de rayon r.

(a) Montrer que l'application

$$B : \begin{array}{ccc} E\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ (a,r) & \longrightarrow & B_F(a,r) \end{array}$$

est injective.

(b) Reprendre la même étude avec : $(a, r) \mapsto B(a, r)$ puis $(a, r) \mapsto S(a, r)$.

5. Montrer que dans $\big(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty\big)$, l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ n'est pas fermé.

6. (a) Montrer que sur $M_n(\mathbb{R})$, $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire, appelée produit scalaire canonique de Frobenius.

(b) Montrer que la norme euclidienne de Frobenius $\|.\|$ vérifie :

$$(\forall\, (A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2), \quad \|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|.$$

7. (a) Montrer que sur l^∞, $N(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$ est une norme.

(b) Les normes N et N_∞ sont-elles équivalentes.

8. On définit sur $E = \{f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})\ ; f(0) = 0\}$, l'application $N(f) = \|f + f'\|_\infty$.

(a) Montrer que N est une norme sur E.

(b) Est-elle équivalente à $\|.\|_\infty$?

(c) Trouver une inégalité entre N et $\|.\|_\infty$ sur E.

9. Soit I un ensemble fini non vide.

(a) Déterminer les normes N sur $\mathbb{R}^I = \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ telles que :

$$(\forall\, f \in \mathbb{R}^I), \qquad N(f^2) = N(f)^2.$$

(b) Existe-t-il une norme N sur $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que :

$$(\forall\, (f, g) \in E^2), \quad N(fg) = N(f)N(g)\ ?$$

(c) On se fixe un entier $n \geqslant 2$. Existe-t-il une norme N sur $E = M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\big(\forall\, A \in M_n(\mathbb{R})\big), \quad N(A^2) = N(A)^2\ ?$$

(d) Montrer qu'il existe une unique norme N sur $S_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\big(\forall\, A \in S_n(\mathbb{R})\big), \quad N(A^2) = N(A)^2.$$

10. On définit sur $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$, l'application

$$N(f) = \left(f^2(0) + \int_{[0,1]} f'^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(a) Montrer que N est une norme sur E.
(b) Montrer que : $(\forall\, f \in E), \quad \|f\|_\infty \leqslant \sqrt{2} N(f)$.
(c) Les normes $\|.\|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

11. Déterminer les limites en $(0,0)$ des fonctions définies de $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$$xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2};\ \frac{x^5-4x^2y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2};\ \frac{x^2y}{4x^2+y^2};\ \frac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2};\ \frac{|xy|^\alpha}{x^2-xy+y^2}, \alpha > 0\cdot$$

12. Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$. Montrer que $\overline{\mathbb{K}} = \mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{K}} = \mathbb{C}$.

13. Déterminer l'adhérence et l'intérieur des sous-espaces vectoriels l^1 et l^2 dans l'espace vectoriel normé l^∞.

14. Soit S une partie d'un espace vectoriel normé E. On suppose que S est fermé et ouvert.
Montrer que $S = \emptyset$ ou $S = E$.

15. Soit P une fonction polynomiale de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
Montrer que l'image par P de tout fermé est un fermé.

16. On considère A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E et $f : A \to \mathbb{R}$ une application k-lipschitzienne, avec $k > 0$.
Démontrer que

$$g : x \mapsto \inf_{y \in A} \left(f(y) + k\|x - y\|\right)$$

définie sur E une application k-lipschitzienne qui constitue un prolongement de f.

17. On considère $E = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\ ; f$ lipschitzienne, nulle en $0\}$. Pour f dans E, on pose

$$N(f) = \inf\{k \geqslant 0\ ; f\ k\text{-lipschitzienne}\}.$$

(a) Montrer que N est une norme sur E et la comparer avec $\|.\|_\infty$.
(b) Montrer que sur $F = \{f \in C^1([0,1], \mathbb{R})\ ; f(0) = 0\}$, N coïncide avec $f \mapsto \|f'\|_\infty$.

18. On considère deux réels $p > 0$ et $q > 0$ tels que : $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

(a) Démontrer que pour $x > 0$ et $y > 0$, on a : $xy \leqslant \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$ et traiter le cas d'égalité.

(b) Pour $\left(a_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $\left(b_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ dans $\mathbb{R}^n$, on pose : $u = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ et $v = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^n |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Démontrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leqslant uv$.

(c) En déduire que : $N_p(x) = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ réalise une norme sur $\mathbb{R}^n$.

19. On considère sur $\mathbb{R}^n$ la norme $N_p : x \mapsto \left(\displaystyle\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, vue précédement, pour tout entier $p \geqslant 1$.

(a) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$: $N_p(x) \xrightarrow[p \to +\infty]{} N_\infty(x) = \displaystyle\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$.

(b) Déterminer une CNS simple sur $x \in \mathbb{R}^n$ pour que la série $\displaystyle\sum_{p \geqslant 1} \big(N_p(x) - N_\infty(x)\big)$ converge.

20. Soit E un espace vectoriel normé et A une partie convexe non vide de E.
Montrer que l'application $d_A : x \mapsto d(x, A)$ est convexe.

21. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de réels et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue .
Donner une CNS sur f pour que $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

22. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application et Γ son graphe dans $\mathbb{R}^2$.

(a) Montrer que si f est continue, Γ est fermé.
(b) Étudier la réciproque.
(c) Montrer que si f est bornée et Γ est fermé, alors f est continue.

23. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

(a) Si la restriction de f à $\mathbb{Q}$ est injective, a-t-on f injective ?
(b) Si la restriction de f à $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est injective, a-t-on f injective ?

24. Quelles sont les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui prennent une nombre fini de valeurs?

25. Montrer qu'une fonction continue décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admet un unique point fixe.

26. (a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $f \circ f$ admet un point fixe. Montrer que f admet un point fixe.
(b) Remplacer $f \circ f$ par $f \circ f \circ f$ et généraliser.
(c) Reprendre l'exercice pour $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

27. Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite réversible s'il existe une application continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(A) \subset \mathbb{R}\backslash A \quad \text{et} \quad f(\mathbb{R}\backslash A) \subset A.$$

(a) Donner un exemple de partie réversible.
(b) Montrer que les parties de $\mathbb{R}$ qui sont ouvertes et fermées sont $\mathbb{R}$ et l'ensemble vide.
(c) L'ensemble $\mathbb{Q}$ est-il réversible ?
(d) Une partie réversible peut-elle être ouverte ? fermée ?
(e) Une partie réversible peut-elle être bornée ?
(f) Une partie réversible peut-elle être un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$?

28. Soit E un espace vectoriel normé et $f : x \mapsto \dfrac{x}{1 + \|x\|}$.

(a) Montrer que f réalise une bijection de E sur la boule $B(0, 1)$.
(b) Montrer que f et sa réciproque f^{-1} sont continues.
(c) Ces fonctions sont-elles lipschitziennes ?

29. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $\alpha \in]0, 1/2[$ tels que :

$$(\forall\, (x, y) \in \mathbb{C}^2), \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \alpha|f(x) - x| + \alpha|f(y) - y|.$$

Montrer que f admet un unique point fixe dans $\mathbb{C}$.

30. (a) La fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est-elle lipschitzienne sur $\mathbb{R}$? est-elle uniformément continue ?
(b) Reprendre ces mêmes questions sur $[0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$.

31. Montrer que $f : E \to E$ est uniformément continue si et seulement si elle conserve les suites de Cauchy de E.

32. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée continue et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue.
La fonction fg est-elle uniformément continue ?

33. Montrer que si $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ est continue et admet une limite en $+\infty$, alors f est uniformément continue.

34. Montrer que si $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ est continue et admet une asymptote en $+\infty$, alors f est uniformément continue.

35. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue périodique, alors f est uniformément continue.

36. (a) Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est uniformément continue, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$(\forall\, x \in \mathbb{R}), \quad |f(x)| \leqslant a|x| + b.$$

(b) Donner un exemple de fonction continue bornée non uniformément continue.

37. Soient A et B des parties non vides d'un espace vectoriel normé de dimension fini E.
On pose $A + B = \{x + y\ ; (x, y) \in A \times B\}$.

(a) On suppose que A est ouvert. Montrer que $A + B$ est ouvert.

(b) On suppose A fermé et B compact. Montrer que $A + B$ est fermé.

(c) On suppose A et B fermés; a t-on $A + B$ fermé ?

38. Soient A et B deux fermés, non vides et disjoints d'un espace vectoriel normé E.
Montrer l'existence de deux ouverts disjoints ω et Ω tels que $A \subset \omega$ et $B \subset \Omega$.

39. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et A une partie fermé non vide.

(a) Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $a \in A$ tel que $d(x, A) = \|x - a\|$.

(b) On suppose ici que $E = \mathbb{R}$ et que I est une partie non vide de $\mathbb{R}$. On fait l'hypothèse que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique élément a dans I tel que : $d(x, A) = |x - a|$.
Montrer que I est un intervalle fermé.

(c) Montrer que le résultat de la question (a) est faux en dimension infinie.

40. On définit pour $P = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ dans $\mathbb{K}[X]$

$$N_1(P) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|, N_2(P) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad N_\infty(P) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

(a) Montrer que ce sont des normes et préciser des inégalités entre elles.
Y'en a-t-il deux d'entre elles qui sont équivalentes ?

(b) Étudier pour chacune de ces normes la continuité des applications linéaires $D : P \mapsto P'$ et $\delta : P \mapsto P(0)$.

41. (a) Déterminer une norme d'algèbre sur $\mathbb{K}[X]$.

(b) Montrer qu'il n'existe pas de norme d'algèbre sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

42. On pose pour $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$N_1(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{P^{(n)}(0)}{n!}\right| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \sum_{n=0}^{\infty} |P^{(n)}(n)|.$$

(a) Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

(b) Ces normes sont-elles équivalentes ?

43. On se donne $P \in \mathbb{R}[X]$.

(a) Montrer que si u est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}[X]$, $\|P\| = \displaystyle\int_{[0,1]} |u(P)|$ définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

(b) Trouver une norme N sur $\mathbb{R}[X]$ telle que la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers P dans $(\mathbb{R}[X], N)$.

44. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$N_A(P) = \sup_{x\in A} |P(x)|. \text{ (éventuellement infini)}$$

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que N_A soit une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

(b) On se fixe dans toute la suite des parties A et B de $\mathbb{R}$ telles que N_A et N_B soient des normes sur $\mathbb{R}[X]$. Montrer que N_A et N_B sont équivalentes si et seulement si elles sont égales.

(c) Fournir une CNS sur A et B pour que $Id_{\mathbb{R}[X]}$ soit continue de $(\mathbb{R}[X], N_A)$ dans $(\mathbb{R}[X], N_B)$.

45. (a) Existe-t-il une norme sur $E = C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ rendant la dérivation continue ?

(b) Reprendre cette même question dans $E = \mathbb{R}[X]$.

(c) Reprendre cette même question dans $E = C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

46. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

47. On munit $M_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa norme euclidienne usuelle et $M_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée associée. Calculer la norme subordonnée à la forme linéaire $A \mapsto \operatorname{tr}(A)$.

48. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa norme euclidienne usuelle et $M_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée associée.

(a) Établir que pour $H \in M_n(\mathbb{R})$, telle que : $|||H||| < 1$, l'on a la relation : $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} H^k = (I-H)^{-1}$.

(b) On pose $\mathcal{S} = \{A \in M_n(\mathbb{R})\ ; \det(A) = 0\}$. Montrer que $\mathcal{S}$ est fermé et calculer $d(I_n, \mathcal{S})$.

(c) Vérifier que pour $A \in GL_n(\mathbb{R})$, la boule $B(A, \rho)$ est contenue dans $GL_n(\mathbb{R})$, où $\rho = \dfrac{1}{|||A^{-1}|||}$.

(d) Établir en fait que pour $A \in GL_n(\mathbb{R})$, on a : $d(A, \mathcal{S}) = \dfrac{1}{|||A^{-1}|||}$.

49. On pose $S = \{A \in M_n(\mathbb{R})\ ; A^2 = I_n\}$.

(a) Montrer que S est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$ et infini.

(b) Montrer que $S \subset GL_n(\mathbb{R})$. Est-ce un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$?

(c) Démontrer qu'il existe un voisinage de I_n qui ne rencontre pas S, à l'exception de I_n.

50. Soit A et B des matrices de $M_n(\mathbb{C})$.
Montrer que $\det(AB - \lambda I_n) = \det(BA - \lambda I_n)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

51. On se donne $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'existence d'un réel $k > 0$ tel que :

$$(\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X]), \qquad \left| \int_0^1 P(t)\, dt \right| \leqslant k \sum_{i=0}^{n} |P(i)|.$$

52. Quelles sont les applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ qui transforme les ouverts en ouverts ?

53. On considère un espace vectoriel normé E. Montrer que $u \in L(E)$ est continue si et seulement si elle transforme toute suite de limite nulle en une suite bornée.

54. On considère un espace euclidien E et p un projecteur non nul de E.
Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si pour tout $x \in E$, $|||p||| \leqslant 1$.

55. Sur $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$, on considère : $\varphi : f \mapsto \displaystyle\int_0^1 t(1-t)f(t)\, dt$. Montrer que pour les trois normes standard $\|.\|_\infty$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_1$, φ est continue et préciser $|||\varphi|||$ dans chacun des cas.

56. On considère $l^\infty(\mathbb{R}) = \{\text{suites réelles bornées}\}$ muni de la norme $\|.\|_\infty$.

(a) Démontrer que l'ensemble $\mathscr{C} = \{\text{suites réelles croissantes}\}$ est fermé dans $l^\infty(\mathbb{R})$.

(b) L'ensemble $\mathscr{C}' = \{\text{suites réelles strictement croissantes}\}$ est-il ouvert dans $l^\infty(\mathbb{R})$?

57. Montrer que si H est le noyau d'une application linéaire d'un espace vectoriel normé E dans $\mathbb{R}$, alors H est ou bien fermé ou bien partout dense dans E.

58. Soit H le noyau d'une application linéaire $l : E \to \mathbb{R}$ où E est un espace vectoriel normé.
Montrer que si l est continue, H est fermé dans E.

(a) On se propose de montrer la réciproque. On suppose H fermé.
Montrer que $H_1 = \{x \in E\ ; l(x) = 1\}$ est fermé dans E.

(b) Montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que sur : $B(0, \rho) = \{x \in E\ ; \|x\| < \rho\}$, l'application l est bornée.

(c) En déduire le résultat.

59. On considère $E = C^0([0,1], \mathbb{C})$ muni de $\|.\|_\infty$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'élément $f_n : t \mapsto e^{int}$.
Montrer à l'aide de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que la sphère-unité de E est fermé bornée mais ne vérifie pas le théorème de Bolzano-Weierstrass.

60. Soit K une partie bornée, possédant au moins deux éléments distincts de $\mathbb{R}^2$.

(a) Montrer l'existence d'une boule fermé de rayon minimal contenant K.

(b) Montrer l'unicité dans le cas euclidien et démontrer que ce résultat est faux en général.

61. On se propose de démontrer le théorème de compacité Riesz :

$$\big(E \text{ est un evn de dimension finie }\big) \Longleftrightarrow \big(E \text{ a sa boule unité fermée compacte }\big).$$

On considère E un espace vectoriel normé.

1) On se donne V un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.
   a) Démontrer que pour tout $x \in E$, il existe $v \in V$ tel que $d(x, V) = \|x - v\|$.
   b) On suppose que V est distinct de E. Démontrer qu'il existe $x \in E$ tel que :

$$\|x\| = 1 \quad \text{et} \quad d(x, V) = 1.$$

   On suppose désormais que E est dimension infinie.

2) Démontrer l'existence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E telle que :

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}), \quad \|x_n\| = 1 \quad \text{et} \quad d\big(x_n, \mathrm{Vect}(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})\big) = 1.$$

3) En déduire le théorème de compacité Riesz.

62. Soit K un compact non vide de $\mathbb{K}^n$.
On considère $f : K \to K$ continue telle que $f(x) \neq x$, pour tout $x \in K$.
Montrer l'existence de $m > 0$ tel que : $(\forall\, x \in K), \quad \|f(x) - x\| \geqslant m$.

63. Soit K un compact non vide de $\mathbb{K}^n$. On considère $f : K \to K$ continue telle que :

$$(\forall\, (x, y) \in K^2), \quad \|f(x) - f(y)\| \geqslant \|x - y\|.$$

(a) Démontrer que f est bijective.
(b) Démontrer qu'elle conserve les distances (isométrie).

64. Soit K un compact non vide de $\mathbb{K}^n$. On considère $f : K \to K$ telle que :

$$(\forall\, (x, y) \in K^2), \quad x \neq y \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

(a) Montrer que f admet un unique point fixe dans K.
(b) Montrer que le résultat est faux s'il on remplace K compact par K fermé.
(c) Soit $a \in K$ ce point fixe. Montrer que la suite récurrente définie par $u_0 \in K$,

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}), \quad u_{n+1} = f(u_n),$$

converge vers a.

65. Soit N une norme sur $M_n(\mathbb{R})$ et S sa sphère-unité associée. On pose pour $A \in M_n(\mathbb{R})$:

$$N^*(A) = \sup\big\{\mathrm{tr}(AB)\ ;\ B \in S\big\}.$$

(a) Montrer que N^* définit une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.
(b) Démontrer l'existence de $A_0 \in M_n(\mathbb{R})$ telle que : $\det(A_0) = \max\{\det(A)\ ; A \in S\}$.
(c) Établir en fait que $\det(A_0) > 0$ et que l'on a : $\det(A_0) = \max\{\det(A)\ ; N(A) \leqslant 1\}$.
(d) Démontrer que : $N^*(A_0^{-1}) = n$.

66. Démontrer qu'il n'existe pas de polynôme à deux lettres $P(X, Y) \in \mathbb{R}[X, Y]$ tel que :

$$(\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2), \qquad \big(x > 0 \text{ et } y > 0\big) \Longleftrightarrow \big(P(x, y) > 0\big).$$

67. Calculer le maximum du produit des distances au cotés d'un triangle ABC d'un point M, intérieur au triangle.

68. On munit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$.

(a) Montrer que l'application $\varphi : f \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\, dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\, dt$ est continue sur E.

(b) Calculer
$$|||\varphi||| = \sup_{\|\xi\|\leqslant 1} |\varphi(\xi)|$$
et montrer que la borne n'est pas atteinte sur la boule-unité fermée de E.

(c) Reprendre avec les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$.

69. On munit $E = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \,; u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\}$ de la norme $\|.\|_\infty$.

(a) Montrer que l'application $\phi : u \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{2^n}$ est continue sur E.

(b) Calculer
$$|||\phi||| = \sup_{\|\xi\|\leqslant 1} |\phi(\xi)|$$
et montrer que la borne n'est pas atteinte sur la boule-unité fermée de E.

70. On considère : $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ et $u : x \mapsto a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$, l'application de $L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$. On note $|||u|||_N$, la norme subordonnée à la norme N sur $\mathbb{K}^n$.

(a) Montrer que : $|||u|||_N = N_1(a)$ pour $N = N_\infty$.

(b) Montrer que : $|||u|||_N = N_\infty(a)$ pour $N = N_1$.

(c) Montrer que : $|||u|||_N = N_2(a)$ pour $N = N_2$.

(d) Montrer que : $|||u|||_N = N_q(a)$ pour $N = N_p$, où les normes N_p et N_q sont définies dans les exercices précédents, où $p > 1$ et $q > 1$ sont tels que : $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

71. On considère $u \in L(\mathbb{K}^n)$ dont la matrice canoniquement associée s'écrit : $A = \big(a_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

(a) Démontrer que sur $(\mathbb{K}^n, N_1)$, la norme subordonnée de u s'écrit : $|||u||| = \displaystyle\max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$.

(b) Démontrer que sur $(\mathbb{K}^n, N_\infty)$, la norme subordonnée de u s'écrit : $|||u||| = \displaystyle\max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.

(c) Démontrer que sur $\mathbb{K}^n$, la norme subordonnée aux normes N_1 et N_∞ de u s'écrit :
$$|||u||| = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|.$$

72. On considère $A \in M_n(\mathbb{C})$ et on pose : $\rho(A) = \max\{|\lambda| \,; \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$. Pour $M \in M_n(\mathbb{C})$, on note $|||M|||$ la norme de M, subordonnée à une norme quelconque sur $M_n(\mathbb{C})$.

(a) Montrer que : $\rho(A) \leqslant |||A^k|||^{\frac{1}{k}}$, pour tout entier $k \geqslant 1$.

(b) Établir l'équivalence : $\big(A^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0\big) \iff \big(\rho(A) < 1\big)$.

(c) Démontrer en fait que l'on a : $|||A^k|||^{\frac{1}{k}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \rho(A)$.

(d) Établir alors que pour toute norme N sur $M_n(\mathbb{C})$, l'on a encore : $\big(N(A^k)\big)^{\frac{1}{k}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \rho(A)$.

73. On définit pour $P = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_nX^n$ dans $\mathbb{K}[X]$, $N_\infty(P) = \displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$.
Etudier la continuité de l'application $\Phi : \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X], \quad (P, Q) \mapsto PQ$.

74. Pour deux suites complexes u et v, on définit leur convolée $w = u * v$ par
$$(\forall\, n \in \mathbb{N}), \quad w_n = \sum_{i+j=n} u_iv_j = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}v_k.$$
Montrer que le produit de convolution $(u, v) \mapsto u * v$ est continue de $l^1 \times l^1$ dans l^1.

75. On considère un espace vectoriel normé E.

(a) Montrer que si u et v sont des endomorphismes de E tels que $u \circ v - v \circ u = Id_E$, on a
$$(\forall\, n \in \mathbb{N}), \quad u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u = (n + 1)v^n.$$

(b) En déduire qu'il ne peut exister u et v des endomorphismes continues de E tels que

$$u \circ v - v \circ u = Id_E.$$

(c) Que pensez-vous du cas de la dimension finie ?

76. Montrer que pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, la suite

$$M_p = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^p}{p!}$$

a ses termes dans $GL_n(\mathbb{R})$, pour p assez grand.

77. Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\exp A$ est un polynôme en A.

78. Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$\left(I_n + \frac{A}{p}\right)^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \exp(A).$$

79. (a) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de matrices de $M_p(\mathbb{C})$, telles que : $A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} A \in M_p(\mathbb{C})$. Montrer que : $\left(I_p + \frac{A_n}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(A)$.

(b) Retrouver alors que si A et B sont deux matrices de $M_p(\mathbb{C})$ qui commutent, on a :

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B).$$

(c) On considère des réels a, b, c et d. Déterminer la limite de la suite $\big(M_n\big)_{n\geqslant 1}$, où l'on a posé :

$$M_n = \begin{pmatrix} \cos\big(a/n\big) & \sin\big(b/n\big) \\ \sin\big(c/n\big) & \cos\big(d/n\big) \end{pmatrix}^n, \quad \big(\forall\, n \in \mathbb{N}^*\big).$$

80. On donne

$$A = \mathrm{diag}(1,2,3), B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Vérifier que P est inversible et calculer $D = P^{-1}AP$.

(b) Calculer alors $\exp(C)$ et $\exp(A)\exp(B)$. Que peut-on en déduire ?

Indications pour quelques exercices

2. Le seul sous-espace vectoriel de E qui contient une boule est E.

3. Pour l'intérieur, faire un dessin.

4. Pour montrer que deux boules identiques ont même rayon, s'intéresser à leur diamètre. Pour le centre, faire un dessin.

5. Penser à la fonction exponentielle.

7. (b) On note comme c'est l'usage la suite $X^n = \big(\delta_{nk}\big)_{k\in\mathbb{N}}$. Étudier la suite de suites $\Big(X^n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$.

8. (c) Il pourra être utile d'exploiter la fonction $g : x \mapsto f(x)e^x$.

9. (d) La norme spectrale $|||A||| = \max\{|\lambda| \ ; \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\} = \max\{\|AX\| \ ; \|X\| \leqslant 1\}$ répond à la question. Pour l'unicité, se servir du fait que les normes sont équivalentes sur $S_n(\mathbb{R})$.

10. Exploiter la relation : $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)\ dt$, pour tout $x \in [0,1]$.

12. Exploiter le fait que : $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$ puis discuter selon les cas $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} \not\subset \mathbb{R}$.

14. Établir que la fonction caractéristique : χ_S est continue.

15. Remarquer que si P est non constante et que la suite $\big(P(z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $\big(z_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

16. Vérifier que g est bien définie et utiliser l'inégalité : $\|x-y\| \geqslant \|x-z\| - \|z-y\|$, pour tout $(x,y,z) \in E^3$.

17.

(a) Exploiter le fait que f est $N(f)$-lipschitzienne, pour tout $f \in E$.

(b) Utiliser l'inégalité des accroissements finis.

18.

(a) Faire une étude de fonction pour le cas d'égalité.

(b) Introduire $x = \dfrac{|a_k|}{u}$ et $y = \dfrac{|b_k|}{v}$ dans l'inégalité précédente, lorsque u et v sont non nuls, et sommer pour $k \in [\![1,n]\!]$.

(c) Pour l'inégalité triangulaire sur $a = (a_1, \cdots, a_n)$ et $b = (b_1, \cdots, b_n)$, exploiter la relation :

$$(|a_k| + |b_k|)^p = (|a_k| + |b_k|)^{p-1}|a_k| + (|a_k| + |b_k|)^{p-1}|b_k|.$$

19. (b) On vérifiera qu'une CNS est l'existence d'un unique : $i \in [\![1,n]\!]$ tel que : $|x_i| = N_\infty(x)$.

21. Montrer qu'une CNS est que f s'annule les valeurs d'adhérence de u.

22.

(b) La réponse est non. Prendre $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$.

(c) Utiliser le fait que toute suite réelle bornée qui admet une unique valeur d'adhérence est convergente.

23. (b) La réponse est oui.

26. (c) Considérer $f : z \mapsto z + e^z$.

27.

(a) Penser aux translations de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(c) Si f existait, $f(\mathbb{R})$ serait dénombrable.

(d) Si Ω est un ouvert réversible avec f qui convient, montrer que : $f^{-1}(\Omega) = \mathbb{R}\backslash\Omega$.

(e) Si f existait, montrer que f aurait un point fixe.

(f) Si f existait, introduire les fonctions $g : x \mapsto x + f(x)$ et $h : x \mapsto x - f(x)$.

29. Introduire la suite u définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

37.

(a) Commencer par le cas où B est un singleton.

(c) La réponse est non. Prendre $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,; xy = 1\}$.

38. Introduire : $\Omega_A = \{x \in E \,; d(x, A) < d(x, B)\}$ et $\Omega_B = \{x \in E \,; d(x, A) > d(x, B)\}$.

39.

(a) Introduire une suite $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A, minimisante, ie telle que : $\|x-a_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} d(x, A)$.

(b) Faire un raisonnement par l'absurde et s'aider d'un dessin.

41. (b) Considérer les suites : $u = \big(n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $X^p = \big(\delta_{pn}\big)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$.

43. Si P est de degré $d \in \mathbb{N}$, on pourra remarquer que la famille $\Big(P, (X^n)_{n\in\mathbb{N}\backslash\{d\}}\Big)$ constitue une base de $\mathbb{R}[X]$.

44.

(a) Démontrer qu'une CNS est que A soit bornée et infini.

(b) Se servir, après l'avoir établi, de la relation $N_A(P^k) = \big(N_A(P)\big)^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(c) Une CNS est : $N_B \leqslant N_A$ ou encore : $\overline{B} \subset \overline{A}$. Pour l'établir, utiliser le théorème de Weierstrass.

45.

(a) Non. Utiliser une famille d'exponentielle.

(b) La réponse est oui.

48.

(b) Se servir de la question précédente.

(c) Remarquer que pour $H \in M_n(\mathbb{R})$, telle que : $|||H||| < \rho$, on a : $A - H = A(I_n - A^{-1}H)$.

49. (c) Le problème ne dépend pas de la norme choisie. En utilisant une norme multiplicative $\|.\|$, vérifier que la boule $B(I_n, 1)$ convient.

50. Remarquer que si A est inversible, AB est semblable à BA.

51. On pourra s'intéresser à l'application : $P \mapsto \displaystyle\sum_{i=0}^{n} |P(i)|$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

52. Ce sont les endomorphismes u qui sont surjectives $\big($s'intéresser à $\mathrm{Im}(u) = u(\mathbb{R}^p)\big)$.

53. Si $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de vecteurs de E, de limite nulle, on pourra introduire la suite $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, où $y_n = \dfrac{x_n}{\|x_n\|^{\frac{1}{2}}}$ si $x_n \neq 0$ et 0 sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

54. Si $|||p||| \leqslant 1$, pour $(a,b) \in \mathrm{Im}(u) \times \mathrm{Ker}(u)$, exploiter l'inégalité : $\|p(ta+b)\| \leqslant |||p|||\ \|ta+b\|$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, afin d'établir que : $\langle a, b\rangle = 0$.

55. Pour $\|.\|_1$, on pourra introduire la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ où $f_n : t \mapsto t^n(1-t)^n$.

56. On pourra s'intéresser à l'application : $l_n : u \mapsto u_{n+1} - u_n$, définie sur $l^\infty(\mathbb{R})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

60.

(a) Introduire : $A = \{r > 0\,;(\exists a \in E)$ tel que : $K \subset B_F(a,r)\}$ et établir, en raisonnant séquentiellement que A admet un plus petit élément.

(b) Dans le cas euclidien, remarquer que l'intersection de deux disques fermés non disjoints, de rayon $r > 0$, est contenue dans un disque fermé de rayon $r' < r$.

61. (1-b) Soit $a \in E\backslash V$. Montrer l'existence de $v \in V$ tel que : $\|a-v\| = d(a,V) = d(a-v,V)$.

63.

(a) Démontrer que : $d\big(x, f(K)\big) = 0$, par exemple au moyen de la suite $u_0 = x$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Elle vérifie $\|u_i - u_j\| \geqslant \|u_{i-j} - x\|$, pour tout $0 \leqslant j < i$.

(b) Considérer pour $(x,y) \in K^2$, deux suites u et v, vérifiant respectivement, $u_0 = x$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ puis $v_0 = y$ et $v_{n+1} = f(v_n)$. Introduire des extractrices $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(v_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ et $v_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$.

64.

(a) On pourra introduire $g : x \mapsto \|f(x) - x\|$ sur K.

(b) Prendre $E = K = \mathbb{R}$.

(c) Remarquer que : $\Big(\|u_n - a\|\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

65. (d) Exploiter le fait que pour $B \in S$, la fonction $\varphi : t \mapsto \det\big((1-t)A_0 + tB\big)$ est définie, de classe C^1 sur $[0,1]$ et présente un maximum en 0.

66. Raisonner par l'absurde en se ramenant à $P(x,y) = xy(a + bx + cy + Q(x,y))$, où Q est des termes de degré $\geqslant 2$.

67. Faire un dessin et par des considérations d'Aire, se ramener à un problème de maximum de produit de termes, à somme constant.

72.

(b) Utiliser le théorème de réduction par blocs (blocs de Jordan).

(c) Vérifier que, pour $\varepsilon > 0$, l'on a pour k assez grand :

$$\big(\rho(A)\big)^k \leqslant |||A^k||| \leqslant \big(\rho(A) + \varepsilon\big)^k$$

75. (b) Utiliser la sous-multiplicativité de la norme d'algèbre pour voir que v est nilpotent puis faire apparaître une contradiction.

77. Se servir du fait que les sommes partielles de la série exponentielle sont dans $\mathbb{C}[A]$.

78. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!} - \left(I_n + \frac{A}{p}\right)^p = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k$, où a_k est un rationnel $\geqslant 0$, pour tout $0 \leqslant k \leqslant p$.

79. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $f_n : M \mapsto \left(I_p + \dfrac{M}{n}\right)^n$ converge uniformément sur tout compact de $M_p(\mathbb{C})$.