Exercices sur la réduction des endomorphismes

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que $A^{n+1} = 0 \Longrightarrow A^n = 0$.

2. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\exp(A) \in \mathbb{K}[A]$.

3. Soit $A \in M_n(\mathbb{Q})$. Comparer le polynôme minimal de A dans $\mathbb{Q}[X]$, dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

4. Une algèbre $\mathcal{A}$ est dite intègre si : $(\forall\,(a,b) \in \mathcal{A}^2), \quad ab = 0 \Longrightarrow a = 0$ ou $b = 0$.
Quelles sont les $\mathbb{C}$-algèbres de dimension finie qui sont intègres ?

5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Quels sont les sous-espaces vectoriels stables par un projecteur ?

6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. On considère un endomorphisme nilpotent u tel que $u^{n-1} \neq 0$.

(a) Déterminer la dimension de $\operatorname{Ker}(u^k)$, pour $k \in [\![0, n]\!]$.

(b) Déterminer tous les sous-espace vectoriel de E stable par u.

7. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E.
On considère des polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$. On pose $D = \mathrm{PGCD}(P, Q)$ et $M = \mathrm{PPCM}(P, Q)$.

(a) Montrer que $\operatorname{Ker}(D(u)) = \operatorname{Ker}(P(u)) \cap \operatorname{Ker}(Q(u))$.

(b) Montrer que $\operatorname{Im}(D(u)) = \operatorname{Im}(P(u)) + \operatorname{Im}(Q(u))$.

(c) A-t-on $\operatorname{Ker}(M(u)) = \operatorname{Ker}(P(u)) + \operatorname{Ker}(Q(u))$?

(d) A-t-on $\operatorname{Im}(M(u)) = \operatorname{Im}(P(u)) \cap \operatorname{Im}(Q(u))$?

8. Déterminer les éléments propres des matrices (les scalaires intervenant sont complexes) :

$$A_1 = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} ; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; A_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} ; A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} ; A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A_8 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} ; A_9 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} ; A_{10} = \begin{pmatrix} d & a & b & c \\ a & d & c & b \\ b & c & d & a \\ c & b & a & d \end{pmatrix};$$

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & b & \vdots & & a & 0 \\ b & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{C}); N = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C});$$

9. Quelles sont les conditions sur les réels a, b, c dans $\mathbb{R}$ pour que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable ?

10. Soient $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}^n$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ a_1 & \cdots & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

(a) Réduire A dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(b) Même étude dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. La matrice est-elle diagonalisable ?

11. On pose $A = (a_i b_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, où $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ sont des scalaires de $\mathbb{K}$.

(a) A est-elle diagonalisable ?

(b) Calculer les puissances de A.

12. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ de diagonale nulle et dont, pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, les termes de la j-ième colonne autres que le terme diagonal sont tous égaux à j.

(a) Montrer que les valeurs propres de A_n sont les solutions de l'équation

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{x+k} = 1.$$

(b) La matrice A_n est-elle diagonalisable ?

(c) On considère $a_1, \cdots, a_n$ des réels. Reprendre la discussion précédente lorsque A_n est la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ de diagonale nulle et dont, pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, les termes de la j-ième colonne autres que le terme diagonal sont tous égaux à a_j.

13. Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A^3) = A$.

14. (a) On considère $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. À l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, déduire un calcul rapide de A^{-1}, A^3, A^{-3}.

(b) On suppose maintenant que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ vérifiant :
$kA^{k+1} = (k+1)A^k$. Établir que $A - I_n$ est inversible et déterminer son inverse.

15. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Précisez le coefficient de X^{n-2} dans P_A, pour $n \geqslant 2$.

16. Soient $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$ des complexes. Calculer $\det\Big(I_n + \big(x_i y_j\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\Big)$.

17. (a) Établir que pour $(A, B) \in M_2(\mathbb{R})^2$: $ABAB = 0 \Rightarrow BABA = 0$.

(b) Reprendre la question dans $M_3(\mathbb{R})$.

18. Déterminer le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices nilpotentes.

19. Soit une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que le spectre de A est contenu dans la réunion des boules de centre a_{ii} et de rayon

$$\rho_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, 1 \leqslant i \leqslant n.$$

20. Soit A une matrice diagonalisable de $M_n(\mathbb{C})$. Déterminer la dimension du commutant de A en fonction des ordres de multiplicités des valeurs propres.

21. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ admettant n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$. Montrer que l'ensemble des commutants est $\mathbb{K}_n[A]$.

22. On considère $A \in M_n(\mathbb{C})$. Donner une CNS sur $P \in \mathbb{C}[X]$ pour que $P(A)$ soit inversible.

23. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure dont les termes diagonaux sont $1, 2, \cdots, n$. Montrer que si la matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$ commutent avec A, elle est triangulaire supérieure.

24. Fournir une condition nécessaire et suffisante sur $a_1, \cdots, a_n$ pour que

$$A = \begin{pmatrix} & & & & a_1 \\ & & & a_2 & \\ & 0 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ & a_{n-1} & & & \\ a_n & & 0 & & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

soit diagonalisable.

25. Déterminer les éléments propres de

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longrightarrow & P(1-X). \end{array}$$

26. Déterminer les éléments propres de

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longrightarrow & (X^2+X)P' - (3X^2-1)P. \end{array}$$

27. On considère $A \in M_n(\mathbb{C})$ et on pose : $\rho(A) = \max\{|\lambda| \,;\, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$. Pour $M \in M_n(\mathbb{C})$, on note $|||M|||$ la norme de M, subordonnée à une norme quelconque sur $M_n(\mathbb{C})$.

(a) Montrer que : $\rho(A) \leqslant |||A^k|||^{\frac{1}{k}}$, pour tout entier $k \geqslant 1$.

(b) Établir l'équivalence : $\left(A^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0\right) \Longleftrightarrow \left(\rho(A) < 1\right)$.

(c) Démontrer en fait que l'on a : $|||A^k|||^{\frac{1}{k}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \rho(A)$.

(d) Établir alors que pour toute norme N sur $M_n(\mathbb{C})$, l'on a encore : $\left(N(A^k)\right)^{\frac{1}{k}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \rho(A)$.

28. Soit la matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$. L'endomorphisme

$$\varphi : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ M & \longrightarrow & \mathrm{tr}(A)M + \mathrm{tr}(M)A. \end{array}$$

est-il diagonalisable ?

29. Soit la matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$. Déterminer les polynômes caractéristiques des endomorphismes

$$\mathcal{L}_A : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ M & \longrightarrow & AM. \end{array} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_A : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ M & \longrightarrow & MA. \end{array}$$

30. (a) On définit pour $A \in M_n(\mathbb{K})$ l'endomorphisme

$$\mathcal{L}_A : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ M & \longrightarrow & AM. \end{array}$$

Montrer que $\mathcal{L}_A$ est diagonalisable ssi A est diagonalisable.

(b) Préciser dans ce cas les éléments de réduction de $\mathcal{L}_A$ par rapport à ceux de A.

(c) Montrer que si A et B sont diagonalisables, l'application $M \mapsto AM + MB$ est diagonalisable et préciser ses éléments propres en fonction de ceux de A et de B.

(d) Même question pour l'endomorphisme $M \mapsto AMB$.

31. (a) Soient A et B des matrices $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que A et B ont une valeur propre commune ssi il existe $P \in M_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AP = PB$.

(b) Montrer que si A et B ont deux valeurs propres distinctes en commun, on peut trouver $P \in M_n(\mathbb{C})$ de rang deux telle que $AP = PB$.

(c) Montrer plus généralement que si P peut être trouvé de rang $r \geqslant 1$, P_A et P_B ont un facteur de degré r au moins.

32. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que $u \in L(E)$ est diagonalisable ssi tout sous-espace vectoriel de E stable par u admet un supplémentaire stable par u.

33. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer qu'un endomorphisme u de E laisse stable au moins une droite ou un plan de E.

34. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On considère $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de E qui commutente deux à deux.
Montrer l'existence d'une base de vecteurs propres commune à chaque u_i, $i \in I$.

35. On considère deux matrices diagonalisables A et B de $M_n(\mathbb{K})$. Démontrer que :

$$\big(A^3 = B^3 \;\text{ et }\; A^2 = B^2\big) \iff \big(A = B\big).$$

36. Soient A et B des matrices $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que si $AB = 0$, A et B sont simultanément trigonalisable.

37. (a) Si $A \in M_n(\mathbb{K})$, A est nilpotente ssi $\operatorname{tr}(A^k) = 0$, pour $k \in [\![1, n]\!]$.

(b) On suppose maintenant que $\operatorname{tr}(A^k) = 0$, pour $1 \leqslant k < n$.
Montrer que A est ou bien nilpotente, ou bien diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.

38. Soient A et B dans $M_n(\mathbb{K})$ telles que A commutent avec $[A, B] = AB - BA$.
Montrer que $[A, B]$ est nilpotent.

39. Pour tout entier $p \geqslant 1$, on dira que deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{C})$ vérifient la propriété $\mathscr{P}_p$ si :

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} A^{p-k} B^k = 0.$$

(a) On suppose l'existence d'un entier $p \geqslant 1$ tel que A et B vérifient la propriété $\mathscr{P}_p$. Établir que A et B vérifient la propriété $\mathscr{P}_{p+1}$.

(b) Montrer que A et B vérifie $\mathscr{P}_p$ si et seulement si $A - \lambda I_n$ et $B - \lambda I_n$ vérifie $\mathscr{P}_p$, pour tout entier $p \geqslant 1$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

(c) En déduire que s'il existe $p \geqslant 1$ tel que $\mathscr{P}_p$ soit vérifiée, A et B ont un spectre identique.

40. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

(a) On considère u et v des endomorphismes de E qui commutent. Montrer qu'ils ont un vecteur propre commun.

(b) Démontrer un résultat analogue si $[u, v] = u \circ v - v \circ u \in \operatorname{Vect}(u, v)$.

(c) En déduire dans les deux derniers cas, l'existence d'une base commune de trigonalisation pour u et v.

41. On considère $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que χ_A soit simplement scindé sur $\mathbb{C}$ et un entier $p \geqslant 2$.
Montrer que : $(\forall\, M \in M_n(\mathbb{C}))$, $\big(MA - AM = M^p\big) \Longrightarrow M = 0$.

42. (a) Soient A et B des matrices de $M_n(\mathbb{K})$. Montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres.

(b) Montrer en fait que $P_{AB} = P_{BA}$.

(c) Montrer plus généralement que si $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{pn}(\mathbb{K})$, avec $n \geqslant p$, alors

$$\det(AB - XI_n) = (-1)^{n-p} X^{n-p} \det(BA - XI_n).$$

43. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et

$$M = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 2A & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{C}).$$

(a) Comparer le polynôme caractéristique de M et celui de A.

(b) Dans le cas où A est diagonalisable, démontrer que M est diagonalisable et comparer les éléments propres.

(c) Démontrer que M est diagonalisable ssi A est diagonalisable.

(d) Donner une condition nécessaire sur A pour que

$$N = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{C})$$

soit diagonalisable.

44. On considère $A \in M_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_2$. Montrer que $A^{12} = 1$.

45. On considère $A \in M_3(\mathbb{Q})$. On suppose que $A^5 = I_3$. Montrer que $A = I_3$.

46. Montrer que tout polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ est le polynôme caractéristique d'une matrice de $M_n(\mathbb{K})$.

47. On considère Γ un sous-groupe fini multiplicatif de $GL_n(\mathbb{R})$ et on note S la somme de ses éléments. Démontrer que $\operatorname{tr}(S)$ est un entier naturel que le cardinal de Γ divise.

48. Pour $A = \left(a_{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on pose $A^{(k)} = \left(a_{ij}^k\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, pour tout entier $k \geqslant 1$.

(a) Déterminer toutes les matrices $A \in M_2(\mathbb{C})$ telles que : $A^{(2)} = A^2$.

(b) Déterminer toutes les matrices $A \in M_2(\mathbb{C})$ telles que : $A^{(k)} = A^k$, pour tout entier $k \geqslant 1$.

(c) Établir que pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, si on a : $A^k = A^{(k)}$, pour $1 \leqslant k \leqslant n+1$, alors $A^k = A^{(k)}$, pour tout entier $k \geqslant 1$.

49. On demande de vérifier si les matrices suivantes sont semblables :

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

(b) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

50. Déterminer toutes les matrices $A \in M_3(\mathbb{R})$ telles que :

(a) $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 6 & -9 \\ 3 & 6 & -8 \end{pmatrix}$.

51. Déterminer dans $M_4(\mathbb{R})$ une solution de :

(a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $A^p = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ où p est un entier naturel non nul.

52. On note

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathcal{C}(N) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \ ; NM = MN\}.$$

(a) Calculer N^2 et N^3.

(b) Montrer que $\mathcal{C}(N)$ est un espace vectoriel et le déterminer.

(c) Déterminer toutes les matrices $M \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $M^{16} = T$.

53. Calculer l'exponentielle des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

54. Soit une matrice nilpotente $N \in M_n(\mathbb{K})$. Déterminer $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $\exp(A) = I_n + N$.

55. Expliciter en fonction de n et des données initiales :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + y_n \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n \end{cases}, (x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2 ; \begin{cases} x_{n+1} = x_n - y_n - z_n \\ y_{n+1} = -x_n - y_n - z_n \\ z_{n+1} = x_n + 3y_n + 3z_n \end{cases}, (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{C}^3 ;$$

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n - 4v_n - 2w_n - 2x_n \\ v_{n+1} = -4u_n - v_n - 2w_n - 2x_n \\ w_{n+1} = 2u_n + 2v_n + w_n + 4x_n \\ x_{n+1} = 2u_n + 2v_n + 4w_n + x_n \end{cases}, (u_0, v_0, w_0, x_0) \in \mathbb{C}^4.$$

56. Expliciter en fonction de n et des données initiales la suite récurrente $(u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{C}^3$ et :

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}), \quad u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n.$$

57. On se fixe $a \in \mathbb{Z}$ et on considère $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $x_0 = 4, x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 3$ et :

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}), \quad x_{n+4} = -x_{n+2} + x_{n+1} + ax_n.$$

Démontrer que pour tout entier premier p, l'entier p divise x_p.

58. Trigonaliser les matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

59. Trouver tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par $u \in L(\mathbb{R}^3)$, dont la matrice canoniquement associée est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

60. (a) Déterminer les endomorphismes u de $\mathbb{C}^6$ vérifiant :

$$(u^2 - u + 3Id_E) \circ (u - 2Id_E)^2 = 0 \text{ et} \begin{cases} (u - 2Id_E)^2 \neq 0 \\ (u^2 - u + 3Id_E) \circ (u - 2Id_E) \neq 0 \end{cases}$$

(b) Ces endomorphisme sont-ils diagonalisables ?

61. Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + I_n = 0$.
Calculer $\mathrm{tr}(A)$ et $\det(A)$.

62. Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.

63. Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(A)$ est pair.

64. Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n = I_n$ et $(I_n, A, \cdots, A^{n-1})$ libre. Montrer que $\mathrm{tr}(A) = 0$.

65. (a) Résoudre dans $M_n(\mathbb{C})$ les équations :

$$M^3 - 3M^2 + 2I_n = 0; \quad M^3 + M = 0.$$

(b) Reprendre ces questions dans $M_n(\mathbb{R})$.

66. (a) On considère A et B deux matrices diagonalisables de $M_2(\mathbb{C})$.
Montrer l'équivalence

$$(A \text{ et } B \text{ commutent}) \iff \big((\forall\, \lambda \in \mathbb{C}), \quad (A + \lambda B \text{ est diagonalisable})\big)$$

(b) Reprendre la question dans $M_2(\mathbb{R})$.

67. Soit une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$. Déterminer le polynôme caractéristique de $\mathrm{Com}(A)$ en fonction de celui de A.

68. (a) Soit une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que si A est diagonalisable (resp. trigonalisable), $\mathrm{Com}(A)$ l'est. Que pensez-vous de la réciproque ?

(b) Dans le cas où A est diagonalisable, déterminer les éléments propres de $\mathrm{Com}(A)$ en fonction de ceux de A.

69. (a) Déterminer toutes les fonctions à valeurs dans $M_n(\mathbb{C})$, $A : t \mapsto A(t)$, continues sur $\mathbb{R}$ et telles que $A(0) = I_n$ avec $A^2 = I_n$.

(b) Déterminer toutes les fonctions à valeurs dans $M_n(\mathbb{C})$, $A : t \mapsto A(t)$, continues sur $\mathbb{R}$ et telles que $A(0) = I_n$ avec $P(A) = 0$, où $P(X) = (X-1)X(X+1) \times \cdots \times (X+n)$.

70. (a) On se fixe un entier $n \geqslant 1$. Montrer que pour tout polynôme P normalisé de degré n,

$$(P \text{ scindé sur } \mathbb{R}) \iff \big((\forall\, z \in \mathbb{C}), \quad |P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^n\big)$$

(b) En déduire que l'ensemble des matrices trigonalisables de $M_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.

(c) On note S un fermé non vide de $\mathbb{C}$ et P un polynôme unitaire de degré $n \geqslant 1$ de $\mathbb{C}[X]$. Démontrer que les racines de P sont dans S ssi : $(\forall\, z \in \mathbb{C})$, $|P(z)| \geqslant d(z,S)^n$.

(d) En déduire que l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres sont de module 1 constitue un fermé de $M_2(\mathbb{C})$.

71. Montrer que $A \in M_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable ssi la seule matrice nilpotente de $\mathbb{C}[A]$ est la matrice nulle.

72. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{R})$, à valeurs propres réelles et simples, est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

73. Déterminer alors l'adhérence dans $M_n(\mathbb{R})$ des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{R})$.

74. Montrer que $A \in M_n(\mathbb{C})$ est nilpotente ssi 0 est adhérent à sa classe de similitude

$$\mathcal{S}(A) = \{P^{-1}AP \ ; P \in GL_n(\mathbb{C})\}.$$

75. Soient deux entiers $m > 1$ et $n \geqslant 1$.

(a) Dénombrer les composantes connexes par arcs dans $M_n(\mathbb{C})$ de

$$\mathscr{C}_{m,n} = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \ ; A^m = I_n\}.$$

(b) Dénombrer les composantes connexes par arcs dans $M_2(\mathbb{R})$ de

$$\mathscr{R}_{4,2} = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \ ; A^4 = I_2\}.$$

(c) Dénombrer les composantes connexes par arcs dans $M_n(\mathbb{R})$ de

$$\mathscr{R}_{m,n} = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \ ; A^m = I_n\}.$$

76. (a) Montrer que $A \in M_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable ssi sa classe de similitude

$$\mathcal{S}(A) = \{P^{-1}AP \ ; P \in GL_n(\mathbb{C})\}$$

est fermé dans $M_n(\mathbb{C})$.

(b) Le résultat est-il vrai dans $M_n(\mathbb{R})$?

77. Si S est une partie non vide de $M_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\mathrm{Sp}(S) = \bigcup_{A \in S} \mathrm{Sp}(A).$$

(a) Montrer que si S est bornée, $\mathrm{Sp}(S)$ est bornée.

(b) Montrer que si S est compact, $\mathrm{Sp}(S)$ est compact.

(c) Le résultat est-il encore vrai pour S fermé ?

(d) Le résultat est-il encore vrai pour S ouvert ?

78. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.
Un endomorphisme $u \in L(E)$ est dit cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $\langle x \rangle = \mathrm{Vect}(u^k(x))_{k \in \mathbb{N}} = E$.

(a) Montrer que si $\langle x \rangle = E$, la famille $(x, u(x), \cdots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.

(b) Montrer qu'un endomorphisme diagonalisable à valeurs propres simples est cyclique.

(c) Montrer que l'ensemble des endomorphismes cycliques est un ouvert partout dense de $L(E)$.

79. Soit $A \in M_2(\mathbb{K})$, où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$. Démontrer que l'ensemble des commutants de A est $\mathbb{K}[A]$.

80. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et u un endomorphisme cyclique de E, c'est-à-dire qu'il existe $x \in E$ tel que $\langle x \rangle = \mathrm{Vect}(u^k(x))_{k \in \mathbb{N}} = E$.

(a) Montrer que la restriction de u à tout sous-espace stable de E est un endomorphisme cyclique.

(b) Montrer que l'ensemble des commutants de u est $\mathbb{K}[u]$. Déterminer sa dimension.

81. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. On considère u un endomorphisme diagonalisable de E. Montrer que les projecteurs spectraux de u sont dans $\mathbb{C}[u]$.

Indications pour quelques exercices

1. Utiliser des arguments de polynôme minimal.

2. Se servir du fait que les sommes partielles de la série exponentielle sont dans $\mathbb{C}[A]$.

4. Pour $a \in \mathcal{A}$, considérer le polynôme minimal de : $\varphi_a : \omega \mapsto a\omega$, qui est un endomorphisme de la $\mathbb{C}$-algèbre de dimension finie $\mathcal{A}$.

5. Montrer que ce sont les sommes (directes) d'un sous-espace du noyau et de l'image de p.

6. (b) Ce sont exactement les $\mathrm{Ker}\,(u^k)$, pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

7. (a),(b) Exploiter à fond l'existence de $(U, V) \in \big(\mathbb{K}[X]\big)^2$ tel que : $UP + VQ = D$.

8. Remarquer que $\chi_{A_{10}}$ est un produit de quatre facteurs. Pour M, remarquer que $\mathbb{C}^{2n}$ est somme directe de plans stables. Pour N, remarquer qu'elle est diagonalisable et calculer $\mathrm{tr}(N^2)$.

10. On pourra s'intéresser au rang de A.

11. On pourra s'intéresser au rang de A et noter que $A = a^\top b$, où l'on a posé : $a = (a_1, \cdots, a_n)$ et $b = (b_1, \cdots, b_n)$.

12. Résoudre formellement le système : $(A_n - \lambda I_n)X = 0$ et éliminer $\lambda \in \mathbb{C}$.

13. Penser au polynôme interpolateur de Lagrange.

15. Faire intervenir $\mathrm{tr}(A)$ et $\mathrm{tr}(A^2)$, après une trigonalisation.

16. On pourra remarquer que la matrice : $\big(x_i y_j\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est de rang $\leqslant 1$.

18. Montrer que l'on obtient l'hyperplan des matrices de trace nulle.

19. Utiliser le critère sur les matrices à diagonale dominante.

21. Commencer par le cas A diagonale.

22. Préciser l'action de P sur le spectre de A.

23. Remarquer que dans ce cas : $B \in \mathbb{K}_n[A]$.

24. $a_k = 0 \iff a_{n+1-k} = 0$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Traiter à fond le cas $n = 2$ puis écrire $\mathbb{C}^n$ comme somme directe de plans (ou droites) stables.

25. Calculer φ^2.

27.

(b) Utiliser le théorème de réduction par blocs (blocs de Jordan).

(c) Vérifier que, pour $\varepsilon > 0$, l'on a pour k assez grand :

$$\big(\rho(A)\big)^k \leqslant |||A^k||| \leqslant \big(\rho(A) + \varepsilon\big)^k$$

28. φ est diagonalisable ssi $\mathrm{tr}(A) \neq 0$. Remarquer que : $M \mapsto \mathrm{tr}(M)A$ est de rang $\leqslant 1$.

29. On trouve : $\big(\chi_A\big)^n$. Commencer par le cas A diagonale.
On peut aussi vérifier que la matrice de $\mathcal{L}_A$ dans la base : $\mathcal{B} = \big((E_{i1})_{1\leqslant i\leqslant n}, (E_{i2})_{1\leqslant i\leqslant n}, \cdots, (E_{in})_{1\leqslant i\leqslant n}\big)$ est $\mathrm{diag}(A, \cdots, A) \in M_{n^2}(\mathbb{K})$.

30.

(a) Remarquer que A et $\mathcal{L}_A$ ont les mêmes polynômes annulateurs.

(b) Traiter d'abord le cas A diagonale. Dans le cas général, faire intervenir une matrice de passage de réduction de A pour construire une base de vecteurs propres de $\mathcal{L}_A$.

(c) Remarquer que les endomorphismes $\mathcal{L}_A$ et $\mathcal{R}_B$ commutent. Pour une base de vecteurs propres, faire intervenir des matrices de passage de réduction de A et de B.

31. Montrer que si A et $B^\top$ ont une valeur propre commune et, si X et Y en sont des vecteurs propres respectifs, construire P en fonction de ces vecteurs. Pour le sens inverse, remarquer que : $\mathscr{P}(A)P = P\mathscr{P}(B)$, pour tout $\mathscr{P} \in \mathbb{K}[X]$ ou traiter d'abord le cas : $P = J_r$, où $\operatorname{rang}(P) = r \geqslant 1$.

32. Étudier le sous-espace vectoriel : $F = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.

33. Dans le cas réel, si u n'admet pas de valeur propre réelle, on pourra s'intéresser à une factorisation de π_u dans $\mathbb{R}[X]$.

34. Se rappeler de la méthode lorsque I est une paire. Faire une récurrence sur $\dim(E)$ dans le cas général.

35. Pour le sens direct, traiter d'abord le cas A inversible. Sinon, si $\mathscr{P}$ est simplement scindé et annule A, alors $\mathscr{P}(0) = 0$ et $\mathscr{P}'(0) \neq 0$. Vérifier que : $A^k = B^k$, pour tout $k \geqslant 2$ et en déduire que $A \in \mathbb{K}[B]$ puis que A et B commutent.

36. Raisonner avec u et v, les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A et B. Traiter la cas A inversible, sinon, introduire $\hat{v} = v|_{\mathrm{Ker}(u)}$.

37.

(a) Raisonner par l'absurde en notant $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres non nulles de A, comptées avec leur ordre de multiplicité. Exploiter : $\lambda_1^k + \cdots + \lambda_p^k = 0$, pour $1 \leqslant k \leqslant n$ pour obtenir une absurdité.

(b) Montrer, par les mêmes arguments, que χ_A est simplement scindé.

38. Montrer que : $\operatorname{tr}([A,B]^k) = 0$, pour tout entier $k \geqslant 1$ et utiliser les exercices qui précèdent.

39. On pourra exploiter pour chaque question que le membre de gauche de $\mathscr{P}_p$ est égal à la dérivée p-ième en 0 de $t \mapsto \exp(tA)\exp(tB)$.

40. (b) Remarquer que $[u,v] = w$ commute avec $[u,w]$ qui donc est nilpotent et par suite, on voit que w est nilpotent.

41. Vérifier que : $M^kA - AM^k = kM^{p+k-1}$, pour tout entier $k \geqslant 1$. En déduire que M est nilpotente et se servir de χ_A simplement scindé. Si on avait M nono nulle, il existerait alors $r \geqslant 1$ tel que $M^r \neq 0$ commute avec A et donc tel que $M^r \in \mathbb{K}[A]$ soit nilpotente et diagonalisable...

42.

(a)(b) Commencer par le cas A inversible.

(c) Commencer par $A = J_r$, avec $r \in [\![0, n]\!]$, et découper B par des blocs correspondants.

43.

(a) Combiner les colonnes puis les lignes par blocs.

(b) Commencer par le cas $n = 1$ et établir que M est semblable à une matrice, diagonale par blocs, avec des blocs diagonaux qui dépendent de A.

(c) Utiliser que π_M est simplement scindé et l'écriture qui précède.

(d) Montrer qu'elle s'écrit $A = 0$.

46. Penser aux matrices compagnons.

47. Démontrer que : $S^2 = pS$, où $p = |\Gamma|$.

48. (c) Pour M et N dans $M_n(\mathbb{C})$, on notera $M \otimes N = \big(m_{ij}n_{ij}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Remarquer que :

$$V = \{M \in M_n(\mathbb{C}) \; ; AM = A \otimes M\},$$

est un espace vectoriel contenant $A, A^2, \cdots, A^n$. Utiliser le théorème de Cayley-Hamilton.

51. Penser au DSE de la fonction : $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{p}}$.

52.

(b) Résoudre formellement le système associé

(c) Remarquer que $N \in \mathbb{R}[T]$.

54. Utiliser les règles de calcul de développement limité pour vérifier que : $B = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} N^k$ convient.

57. Trouver une matrice $A \in M_4(\mathbb{Z})$ telle que : $x_n = \mathrm{tr}(A^n)$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Se servir, en travaillant dans $\mathbb{F}_p$, que : $\mathrm{tr}(A^p) \equiv \mathrm{tr}(A) \pmod p$, pour tout entier premier p.

60. (a) Utiliser le théorème de décomposition des noyaux et étudier l'action de u sur :

$$F = \mathrm{Ker}\,(u^2 - u + 3Id_E) \;\text{ et }\; G = \mathrm{Ker}\,(u - 2Id_E)^2.$$

61. Remarquer que A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ et que $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$.

62. Utiliser le fait que $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$ et remarquer que les valeurs propres de A sont des racines de $X^3 - X - 1$.

63. Remarquer que A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ et que $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$.

65. (b) Utiliser le théorème de décomposition des noyaux sur $\mathbb{R}^n$ et que si $u \in L(\mathbb{R}^n)$ n'est pas une homothétie, il existe une base $\big(e_k\big)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $e_2 = u(e_1)$.

66. (a) Pour la réciproque, commencer par le cas $A = \mathrm{diag}(1, 0)$.

67. Commencer par le cas A inversible.

68.

(a) Utiliser la relation : $\mathrm{Com}(AB) = \mathrm{Com}(A)\mathrm{Com}(B)$ (commencer par des matrices inversibles). La réciproque est fausse.

(b) Commencer par A inversible.

69. On pourra s'intéresser à la fonction $t \mapsto \mathrm{tr}\big(A(t)\big)$.

71. Remarquer que si A n'est pas diagonalisable, π_A n'est pas simplement scindé.

72. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ tel que χ_A soit simplement scindé, avec les valeurs propres : $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$. Construire un voisinage V autour de A telle que si $B \in V$, on a : χ_B est simplement scindé sur $\mathbb{R}$.

73. C'est l'ensemble des matrices trigonalisables de $M_n(\mathbb{R})$.

74. Se servir du fait que A est nilpotente ssi elle est semblable à une matrice triangulaire stricte.

75.

(a) La matrice $A \in \mathscr{C}_{m,n}$ peut être jointe par un chemin continue à valeurs dans $\mathscr{C}_{m,n}$ à une matrice du type $\mathrm{diag}\big(\omega^{k_1}, \cdots, \omega^{k_1}\big)$, où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{m}}$ et $0 \leqslant k_1 \leqslant \cdots \leqslant k_n < m$ sont des entiers. On trouve une bijection entre ces composantes connexes et l'ensemble des suites croissantes de $[\![0, m-1]\!]$, au nombre de $\dbinom{n+m-1}{n}$.

(c) Le raisonnement démarre de manière analogue, à l'exception des valeurs propres qui sont deux à deux conjuguées, ce qui assure que la matrice $A \in \mathscr{R}_{m,n}$ peut être jointe, au prix d'une discussion sur le signe du déterminant de la matrice de passage, par un chemin continue à valeurs dans $\mathscr{R}_{m,n}$ à une matrice du type $\mathrm{diag}\big(I_p, -I_q, R(\theta_1), \cdots, R(\theta_s)\big)$ avec :
$0 < \theta_1 \leqslant \cdots \leqslant \theta_s < 2\pi$ et $m\theta_i \equiv 0\ [2\pi]$.

78.

(a) Utiliser le fait que : $\mathbb{C}[u] = \mathbb{C}_{n-1}[u]$.

(c) Si u est un endomorphisme cyclique tel que : $\mathscr{B} = \big(u^k(x)\big)_{0 \leqslant k < n}$, constitue une base de E, introduire l'application : $\omega \mapsto \det_{\mathscr{B}}\big(x, \omega(x), \cdots, \omega^{n-1}(x)\big)$ sur $L(E)$.

79. Traiter d'abord le cas où A a deux valeurs propres complexes distinctes.

80. (a) Remarquer que $I = \{P \in \mathbb{C}[X]\ ; P(u)(x) \in F\}$, est un idéal de $\mathbb{C}[X]$ engendré par P_0. Introduire $y = P_0(u)(x)$.

81. Utiliser le théorème chinois sur les polynômes.