Exercices sur les familles sommables

1. On note : $\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, que l'on sait défini, pour tout entier $p \geqslant 2$.

Déterminer la somme : $S = \sum_{p=2}^{+\infty} \Big(\zeta(p) - 1\Big)$.

2. On pose : $u_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n}$ et $v_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^3} - \frac{1}{2n^2}$.

(a) Démontrer que les séries $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ sont bien définies et qu'elles convergent.

(b) Établir la relation : $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1\cdot$

(c) On donne : $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}\cdot$ Établir la relation : $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \frac{\pi^2}{12}\cdot$

3. On rappelle que la constante d'Euler γ vérifie : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$. Établir les relations :

$$\gamma = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} + \log(1 - \frac{1}{n}) \right) = 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{\zeta(k) - 1}{k} \right).$$

4. Etudier selon $\alpha \in \mathbb{R}$ la sommabilité des familles suivantes :

$$u_{n,m} = \frac{1}{(n+m+1)^\alpha}, \quad (n,m \geqslant 0) \quad et \quad v_{n,m} = \frac{1}{(n^2+m^2)^\alpha}, \quad (n,m \geqslant 1).$$

5. (a) Peut-on trouver une série réelle $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ telle que : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^k = \frac{1}{k^2}$, pour tout entier $k \geqslant 1$?

(b) Reprendre la question dans le cas d'une série complexe absolument convergente.

6. Déterminer l'ensemble de définition D dans $\mathbb{C}$ de $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1 - z^n}$ puis justifier que pour z dans D, on a $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) z^n$ avec $d(n)$ le nombre de diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$.

7. Etudier la sommabilité (et la somme) de la suite double définie pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$:

$$a_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+2)!}.$$

8. Etudier la sommabilité (et la somme) de la suite double définie pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$:

$$a_{p,q} = \frac{1}{2^{3q+p+(p+q)^2}}.$$

9. On donne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

On note $I = \{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \ ; \ p \wedge q = 1\}$. Étudier la sommabilité (et la somme) de la famille

$$\left(\frac{1}{p^2 q^2} \right)_{(p,q)\in I}$$

10. Etudier la sommabilité (et la somme) de la suite double définie pour $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_{m,n} = \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)}$$

et en déduire la somme de la série

$$\sum \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n(n+1)}.$$

11. Montrer que pour tout complexe $|\, z \,| < 1$, on a les formules suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2n-1}}{1-z^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^{2n}} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \frac{z}{1-z}\cdot$$

12. On fixe a et $b > 0$. Déterminer quelle CNS la famille donnée par $u_{n,m} = \dfrac{1}{a^n + b^m}$ est sommable $(n, m \geqslant 0)$.

13. Étudier la sommabilité (et la somme) de la suite double définie pour $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ par

$$u_{p,q} = \frac{pq^2}{2^q(p2^q + q2^p)}\cdot$$

14. Pour tout nombre complexe z de module < 1 et tous $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{nb}}{1+z^{na+c}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{nc}}{1-z^{na+b}}.$$

15. On considère un réel $a > 0$. Démontrer la relation :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(2n+1)a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\operatorname{sh}(2n+1)a}\cdot$$

16. (a) Démontrer la relation, pour tout entier $p \geqslant 2$: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\zeta(n)}{p^n} = \int_0^1 \frac{t^{p-2}}{1+t+\cdots+t^{p-1}}\,\mathrm{d}t.$

(b) Établir plus généralement, pour un réel $x \in]-1, 1[$, la relation :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \zeta(n) x^n = \int_0^1 \frac{x\,(1-t^x)}{t^x\,(1-t)}\,\mathrm{d}t.$$

17. (a) Démontrer la relation, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k - n\lfloor k/n \rfloor}{k(k+1)} = \ln n\cdot$$

(b) On note $S(n,k)$ la somme des chiffres du nombre k en base $n > 1$, pour tout entier $k \geqslant 1$. Déterminer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{S(n,k)}{k(k+1)}\cdot$

(c) Démontrer que pour tout entier $n > 1$ et tout réel $s > 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{\infty} S(n,k) \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s} \right) = \frac{n^s - n}{n^s - 1}\ \zeta(s)\cdot$$

18. Démontrer que : $\displaystyle\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{pq(p+q)} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\cdot$

19. On fixe un réel $a \in]-1, 1[$, et on définit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a^n x).$$

Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, c'est à dire qu'il existe une suite (a_n) tels que pour tout x réel, on ait

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

20. Démontrer l'existence d'une suite a telle que pour tout nombre complexe z de module $\leqslant 1/2$, on ait l'égalité

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (z + z^2)^{2^n - 1} = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p.$$

Autrement dit f est développable en série entière au voisinage de zéro avec un rayon de convergence au moins égal à $1/2$.

21. Pour $n, m \geq 1$, posons $u_{n,m} = \dfrac{1}{m^2 n + n^2 m + 2nm}$.

Montrer que cette famille est sommable et déterminer sa somme.

22. Est-ce que la famille suivante, indexée par $\mathbb{N}^2$, est sommable ?

$$u_{p,q} = \frac{2(p-q)}{(p+q+1)(p+q+2)(p+q+3)}.$$

23. On note $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$.

On définit σ de $\mathbb{N}^*$ dans lui-même par $\sigma(3k) = 2k+1, \sigma(3k+1) = 2(2k+1), \sigma(3k+2) = 2(2k+2)$ pour tout entier $k \geqslant 1$. Vérifier qu'il s'agit d'une permutation de $\mathbb{N}^*$ et étudier (convergence et somme éventuelle) la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_{\sigma(n)}$.

24. Soit $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n$ une série convergente à termes positifs.

(a) Montrer que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{a_n}{n(n+1)} < +\infty$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{a_n}{n(n+1)} < +\infty$ et comparer cette dernière somme à $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

(b) On suppose que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \sqrt{n} a_n < +\infty$. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, le réel $b_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} a_k^2$ existe et étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \sqrt{\frac{b_n}{n}}$.

25. On note $u_{n,m} = \dfrac{1}{n^2 - m^2}$ pour $n, m \geqslant 0$ distincts, 0 sinon. Existence et calcul de $\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m} \right)$.

Est-ce que cette famille est sommable ?

26. Dans cet exercice, $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs de $n \in \mathbb{N}^*$ et φ est l'indicatrice d'Euler.

(a) Montrer que pour $\alpha > 1$, on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^\alpha} = \zeta^2(\alpha)$.

(b) As t-on convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{d(n)}{n}$?

(c) Montrer que pour $\alpha > 2$, on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^\alpha} = \frac{\zeta(\alpha-1)}{\zeta(\alpha)}$.

(d) As t-on convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\varphi(n)}{n^2}$?

27. Pour $n \geqslant 1$, on note $\pi(n)$ le plus grand facteur premier de n. Étudier la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\pi(n)}$.

Indications pour quelques exercices

2. (a) On pourra exploiter la relation : $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$

4. Pour $\left(u_{m,n}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$, on pourra sommer à $m+n$ constant. Pour $\left(v_{m,n}\right)_{m\geqslant 1, n\geqslant 1}$, on pourra utiliser : $2nm \leqslant n^2+m^2 \leqslant (n+m)^2$.

5.

(a) La somme pour $k=4$ est le carré de la somme pour $k=2$, avec des termes $\geqslant 0$.

(b) Trouver un équivalent du membre de gauche, lorsque $k \to +\infty$.

6. On pourra remarquer que : $d(n) = \mathrm{Card}\{(i,j)\in [\![1,n]\!] \,;\, ij=n\}$.

7. Utiliser la relation : $a_{pq} = \dfrac{p!}{p+1}\left(\dfrac{q!}{(p+q+1)!}-\dfrac{(q+1)!}{(p+q+2)!}\right)$.

8. La somme à $p+q$ constant est un terme téléscopique.

9. Penser à sommer la famille $\left(\dfrac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ sur les couples à PGCD constant.

10. $u_{m,n}$ est un terme téléscopique.

12. Penser à : $a^n + b^m \geqslant 2a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{m}{2}}$.

13. Pour la somme, calculer d'abord : $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}\left(u_{p,q}+u_{q,p}\right)$.

17.

(a) Remarquer que : $r_n(k) = k - n\lfloor k/n\rfloor = k \bmod n$. Faire une sommation à $k \bmod n$ constant.

(b) Fixons un entier $n \geqslant 2$ et notons $\sigma_i(k)$ le i-ième de chiffre de k dans son écriture en base n.
On a : $S(n,k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i(k)$. Exprimer $\sigma_i(k)$ en fonction de $r_n(k)$.

18. Sommer à $p+q$ constant puis par ailleurs exploiter la relation : $\dfrac{1}{pq(p+q)} = \dfrac{1}{p^2}\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p+q}\right)$.

22. Raisonner directement ou effectuer une décomposition en éléments simples.

23. Prendre un produit de séries alternées.

26. (c) On a successivement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varphi(n)}{n^\alpha}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha} = \sum_{p,q\geqslant 1}^{+\infty}\frac{\varphi(p)}{p^\alpha q^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{pq=n}\frac{\varphi(p)}{(pq)^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^\alpha}\sum_{p/n}\varphi(p)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

27. On pourra sommer les termes à $\pi(n)$ constant.