Exercices de dénombrement

1. (a) Démontrer la formule du crible pour n ensembles finis $A_1, \cdots, A_n$:
$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_p}| = \sum_{I\subset[\![1,n]\!]} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|.$$
   (b) En déduire le nombre de surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$ lorsque $1 \leqslant p \leqslant n$.

2. Déterminer par des arguments de dénombrement le nombre de solution de l'équation
   (a) dans $\mathbb{N}^2$, $x_1 + x_2 = n$
   (b) dans $\mathbb{N}^3$, $x_1 + x_2 + x_3 = n$
   (c) dans $\mathbb{N}^p$, $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$
   (d) dans $\mathbb{N}^p$, $x_1 + x_2 + \cdots + x_p \leqslant n$.

3. Combien peut-on former de sigles d'entreprises
   (a) avec au plus 3 lettres de l'alphabet latin?
   (b) avec au plus n lettres de l'alphabet latin ? (on interdit les sigles à une lettre)

4. (a) Soit E un ensemble de cardinal $n \geqslant 1$. Combien existe t'il de couples de parties de E dont la réunion est E.
   (b) Même chose avec des triplets.

5. Soit des entiers naturels a et b. Montrer la relation
$$\binom{a+b}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{a}{k}\binom{b}{p-k},$$
   avec une convention que l'on précisera.

6. (a) Combien existe t'il de surjection d'un ensemble à $n+1$ éléments vers un ensemble à n éléments?
   (b) Combien existe t'il de surjection d'un ensemble à $n+2$ éléments vers un ensemble à n éléments?
   (c) Combien existe t'il de surjection d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à 2 éléments?
   (d) Combien existe t'il de surjection d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à 3 éléments?

7. Montrer les relations
   (a)
$$\sum_{p\leqslant k\leqslant n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$
   (b)
$$\sum_{0\leqslant k\leqslant p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}$$
   (c)
$$\sum_{0\leqslant k\leqslant p} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 0$$

8. On considère r drapeaux discernables et n poteaux numérotés, suffisamment grands pour supporter les r drapeaux.
   (a) On suppose $r = n = 2$. De combien de façons peut-on disposer les drapeaux sur les poteaux?
   (b) Généraliser.

9. Démontrer que dans un ensemble fini, il y a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

10. On considère un ensemble E de cardinal n.
   (a) Dénombrer les couples (X, Y) de parties de E telles que $X \subset Y$.
   (b) Dénombrer les couples (X, Y) de parties de E telles que $X \cup Y = E$.
   (c) On se donne une partie A à p éléments contenue dans E. Dénombrer les couples (X, Y) de parties de E telles que $X \cap Y = A$.
   (d) Généraliser à des triplets et des k-uplets.

11. On suppose que $2n$ personnes s'asseyent autour d'une table ronde ayant $2n$ places.
   (a) De combien de façons différentes (à une rotation prêt) peuvent-elles s'asseoir?
   (b) On suppose qu'il y a n hommes et n femmes. De combien de façons peuvent-elles s'asseoir (à rotation prêt) si on désire respecter l'alternance?

12. **Nombre de dérangements : première approche**
   On dira que $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est un dérangement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\sigma(i) \neq i$, c'est-à-dire que σ n'admet pas de point fixe dans $[\![1, n]\!]$. On note D_n le nombre de dérangements de $\mathfrak{S}_n$. En raisonnant sur l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_n$ qui ne sont pas des dérangements, déterminer D_n.

13. **Nombre de dérangements : seconde approche**
   On dira que $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est un dérangement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\sigma(i) \neq i$, c'est-à-dire que σ n'admet pas de point fixe dans $[\![1, n]\!]$. On note D_n le nombre de dérangements de $\mathfrak{S}_n$.
   (a) Montrer la relation de récurrence :
   $$(\forall\, n \in \mathbb{N}),\ n! = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} D_{n-p}.$$
   (b) Montrer que la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{D_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence $\geqslant 1$. On notera S sa somme sur $]-1, 1[$.
   (c) Vérifier la relation sur $]-1, 1[$:
   $$e^x S(x) = \frac{1}{1-x},$$
   et en déduire une expression de D_n et un équivalent la suite $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
   (d) Montrer par des techniques de dénombrement la relation : $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)$,
   $$D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1}).$$

14. **Nombre de dérangements : Troisième approche**
   (a) Calculer pour $p \in [\![0, n]\!]$ la somme
   $$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}.$$
   (b) Soit D_n le nombre de dérangements de S_n. Vérifier que
   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} = n!$$
   avec la convention $D_0 = 1$.
   (c) En déduire que
   $$D_n = n! \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right).$$
   (d) Démontrer enfin que (partie entière)
   $$D_n = E\left(\frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \right).$$

15. On considère $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $i < j$ deux éléments $[\![1, n]\!]$. On dit que la paire $\{i, j\}$ est une inversion pour σ quand $\sigma(i) > \sigma(j)$. On note I_n le nombre total d'inversions dans l'ensemble des $n!$ permutations de $\mathfrak{S}_n$.

    (a) Vérifier que l'on a pour $n \geqslant 1$,

    $$I_{n+1} = (n+1)I_n + \frac{(n+1)!\, n}{2}.$$

    (b) En déduire une expression de I_n, pour $n \geqslant 1$.

16. On pose pour $n \in \mathbb{N}$
    $$a_n = \#\{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3 \ ; i + 2j + 3k = n\}.$$

    (a) Montrer que :

    $$(\forall\, x \in]-1, 1[), \quad \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

    (b) Á l'aide d'un logiciel de calcul formel, en déduire l'expression de a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

    (c) Généraliser ce résultat de dénombrement.

    (d) Déterminer pour $n \in \mathbb{N}$

    $$\alpha_n = \#\left\{(i, j, k) \in [\![0, 3]\!] \times [\![1, 5]\!] \times [\![2, 9]\!] \ ; i + 2j + 3k = n\right\}.$$

17. On pose $S_{n,p}$ le nombre d'applications surjectives de $[\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, où $n \geqslant p \geqslant 1$.

    (a) En convenant que $S_{n,0} = 0$, montrer que :

    $$p^n = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} S_{n,k}.$$

    (b) En déduire la relation

    $$S_{n,p} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n.$$

18. Soient n et k deux entiers naturels vérifiant $1 \leqslant k \leqslant n$.

    (a) Déterminer le nombre des applications strictement croissantes de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

    (b) Soit f une application croissante de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$. Montrer que l'application g de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, k+n-1]\!]$ définie sur $[\![1, k]\!]$ par $g : p \mapsto f(p) + p - 1$, est strictement croissante.

    (c) Soit A l'ensemble des applications croissantes de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ et B l'ensemble des applications strictement croissantes de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, k+n-1]\!]$.
    Montrer qu'il existe une bijection de A sur B et en déduire le nombre des applications croissantes de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

19. Le nombre de Stirling de deuxième espèce $S_{n,k}$ est le nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$ en k parties.

    (a) Calculer $S_{n,1}$, $S_{n,2}$ et $S_{n,n-1}$.

    (b) Montrer que pour n et k dans $\mathbb{N}^*$, $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$.

    (c) Démontrer la relation :

    $$S_{n,k} = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{n_1+\cdots+n_k=n \\ n_i>0}} \frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_k!}.$$

20. Si n est un entier naturel non nul, on note B_n (nombres de Bell) le nombre de partitions d'un ensemble ayant n éléments. On convient que $B_0 = 1$.

    (a) Déterminer les premières valeurs de B_n et établir une formule de récurrence permettant leur calcul de proche en proche.

(b) On considère la série entière de variable réelle $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{B_n}{n!}x^n$. Démontrer que son rayon de convergence est au moins 1 et déterminer sa somme dans $]-1,1[$. Donner une expression de B_n sous forme sommatoire.

21. Au cours d'une élection, le candidat A a obtenu a voix et le candidat B en a obtenu b.
On suppose que $a > b$.

    (a) Quel est le nombre de dépouillements différents possibles ?

    (b) Quel est le nombre de dépouillements différents durant lesquels le candidat A est toujours resté strictement en tête ?

22. Si A est une partie de $[\![1,100]\!]$ de cardinal 55, démontrer qu'il existe n dans A tel que $n+9$ soit aussi dans A.

23. On dispose d'un polygone régulier à n côtés. Déterminer le cardinal du plus grand ensemble de sommets tels que trois d'entre-eux ne forment jamais un triangle équilatéral.

24. (a) Déterminer le nombre de parties de $[\![1,n]\!]$ ne contenant pas deux entiers consécutifs.

    (b) Soit $u_{n,k}$ le nombre de parties de $[\![1,n]\!]$ de cardinal k ne contenant pas deux entiers consécutifs. Montrer que
$$u_{n,k} = \binom{n-k+1}{k}.$$

25. Déterminer les permutations σ dans $\mathfrak{S}_{2n}$ telles que :
$$\sigma(1) < \sigma(2) < ... < \sigma(n) \quad \text{et} \quad \sigma(2n) < \sigma(2n-1) < ... < \sigma(n).$$

26. (a) Déterminer le nombre de permutations circulaires dans $\mathfrak{S}_n$.

    (b) Déterminer le nombre de cycles de longueur k dans $\mathfrak{S}_n$.

    (c) Déterminer le nombre de permutations σ dans $\mathfrak{S}_n$ telles que $\sigma^2 = Id$.

27. Dénombrer les permutations dans $\mathfrak{S}_{20}$ dont la décomposition en produit de cycles à supports disjoints contient exactement trois 4-cycles, deux 3-cycles et deux points fixes.

28. Soit c_n le nombre de permutations σ dans $\mathfrak{S}_n$ connectées, c'est à dire telles que :
pour tout k dans $[\![1,n-1]\!]$, $\sigma([\![1,k]\!]) \neq [\![1,k]\!]$.
Montrer que
$$n! = \sum_{k=1}^{n}(n-k)!c_k.$$