# Étude de suites réelles et complexes

**1.** On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}, (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

**2.** On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

**3.** On considèrent des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad u_n^3 - v_n^3 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont pour limite 0. Traiter le cas complexe.

**4.** Montrer que de toute suite réelle, on peut extraire une sous-suite monotone.

**5.** (a) On considèrent une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis des réels distincts $a$ et $b$ telles que $(|u_n - a|)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(|u_n - b|)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(b) Reprendre l'étude dans $\mathbb{C}$.

**6.** Étudier les suites

$$a_n = \left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n, \qquad b_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}, \qquad c_n = (n+1)^{\frac{n+2}{n+1}} - n^{\frac{n+1}{n}},$$

$$x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2+nk}}.$$

**7.** Á deux suites complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on associe la suite

$$x_n = \frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}.$$

Montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\alpha$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\beta$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\alpha\beta$.

**8.** (a) Étudier les suites

$$u_n = \sum_{p=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{p}^{\alpha}} \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{p=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{p}^{\frac{1}{n}}},$$

où $\alpha$ est un réel $\geqslant 0$.

(b) Dans le cas $\alpha = 1$, donner un développement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec trois termes significatifs.

**9.** Les nombres de Fibonacci sont définis par : $F_0 = 0$ , $F_1 = 1$ et : $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $(\forall\, n \in \mathbb{N})$.
Étudier la suite $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$ dont le terme s'écrit pour $n \geqslant 1$ : $u_n = \displaystyle\sum_{F_n \leqslant k \leqslant F_{n+1}} \frac{1}{k}$.

**10.** Soit la suite récurrente définie par : $u_0 = 2, u_1 = 3$ et :

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}), \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n.$$

(a) Écrire une procédure itérative et récursive fournissant le $n$-ième terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Donner une expression explicite de $u_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

(c) Déterminer un réel $\xi > 0$ tel que :

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}^*), \quad E(\xi^n) \equiv n \mod 2.$$

**11.** Trouver toutes les fonctions $f : ]0,+\infty[ \longrightarrow ]0,+\infty[$ telles que :

$$(\forall\, x > 0), \quad f(f(x)) = 6x - f(x).$$

**12.** On considère une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $a_{n+2} = |a_{n+1}| - a_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 9-périodique.

**13.** On considère les trois suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $x_0 > 0, y_0 > 0$ et $z_0 > 0$ puis la récurrence :

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}), \qquad \begin{cases} x_{n+1} = |y_n - z_n| \\ y_{n+1} = |x_n - z_n| \\ z_{n+1} = |x_n - y_n|. \end{cases}$$

1) Montrer que ces trois suites convergent vers trois limites dont deux sont égales et l'autre nulle.
2) Démontrer que si $x_0, y_0$ et $z_0$ sont rationnels, ces trois suites finissent par stationner.
3) Déterminer les trois limites dans le cas $x_0 = 0, y_0 = a$ et $z_0 = b$ où $(a,b) \in \mathbb{N}^2$.
4) Dans la suite, on suppose $x_0 = 0, y_0 = 1$ et $z_0 = t$, où $t$ est un réel $\geqslant 0$.
   On pose alors : $f(t) = \max\left(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n,\ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n,\ \lim\limits_{n\to+\infty} z_n\right)$.
   4-a) Démontrer les relations : $f(t) = tf(1/t)$ et $f(t+1) = f(t)$, pour tout $t > 0$.
   4-b) Établir pour tout $t \geqslant 0$ : $f(t) = f(\{t\})$, où pour $s > 0$, l'on a posé : $\{s\} = s - \lfloor s \rfloor$.
   4-c) Établir pour tout $t \geqslant 0$ : $f(t) = f(1-\{t\}) = f\big(d(t,\mathbb{N})\big)$, où $d(t,\mathbb{N}) = \min\{|t-n|\ ; n \in \mathbb{N}\}$.
5) On suppose : $x_0 = 0, y_0 = 1$ et $z_0 = t$, où $t$ est un réel $\geqslant 0$.
   Déterminer : $\max\left(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n,\ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n,\ \lim\limits_{n\to+\infty} z_n\right)$.

**14.** On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $(a_0, b_0, c_0, d_0) \in \mathbb{R}^4$ puis la récurrence :

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}), \qquad \begin{cases} a_{n+1} = |a_n - b_n| \\ b_{n+1} = |b_n - c_n| \\ c_{n+1} = |c_n - d_n| \\ d_{n+1} = |d_n - a_n|. \end{cases}$$

On note $\xi$ le réel tel que $\xi - 1$ soit l'unique racine réelle de $X^3 + 2X^2 - 2$.
Démontrer que ces suites finissent par stationner vers 0 sauf s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\{a_p, b_p, c_p, d_p\} = \{1, \xi, \xi^2, \xi^3\},$$

à une transformation près à préciser.

**15.** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\lfloor \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$.

**16.** On se donne un entier naturel $n \geqslant 1$ et on considère la suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telle que $x_0 = n$ et

$$(\forall\, p \in \mathbb{N}), \qquad x_{p+1} = \left\lfloor \frac{1}{2}\left(x_p + \frac{n}{x_p}\right) \right\rfloor.$$

Démontrer que la suite finit par osciller aux deux valeurs $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ et $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$ si $n+1$ est un carré parfait, ou par stationner à $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ sinon.

**17.** On définit la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{N}^*$ et $u_{n+1} = u_n + \lfloor \sqrt{u_n} \rfloor$.
Démontrer que dans les valeurs prises par $u$, il y'a une infinité de carrés.

**18.** On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}$ et :

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}), \quad u_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k^2.$$

(a) Pour $u_0 = 2$, cette suite est-elle à valeurs entières ?
(b) Pour $u_0 = 4$, cette suite est-elle à valeurs entières ?

**19.** Étudier la suite
$$u_n = \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right).$$

**20.** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que $x_{n+1} - x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un intervalle.

**21.** On considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs $\geqslant 0$, telles que
$$a_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a, \qquad b_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b,$$
où $a$ et $b$ sont des réels $> 0$. On introduit deux réels positifs $p, q$ de somme 1.
Étudier la suite $\left((pa_n + qb_n)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

**22.** Étudier la suite
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{ch}\frac{1}{\sqrt{n+k}} - n.$$

**23.** On considère la suite
$$a_n = \prod_{k=1}^{n} (a+kb)^{\frac{1}{n}}, \quad \text{où } a > 0 \text{ et } b > 0.$$
Démontrer que :
$$\frac{a_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{b}{e}.$$
Faire avec le logiciel une implémentation de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et vérifier le résultat.

**24.** On considère la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général : $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(x + \frac{k}{n}\right)$ où $x > 0$.

(a) Démontrer que sur $]0, +\infty[$, la fonction $f : t \mapsto (t+1)\ln(t+1) - t\ln t - 1$ s'annule en un unique réel $\sigma > 0$.

(b) Vérifier que si $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $C^2$, l'on a :
$$\left(\forall\, (a,b) \in I^2\right), \quad \int_a^b g(t)\, dt = (b-a)g(a) + \frac{(b-a)^2}{2}g'(a) + \int_a^b \frac{(b-s)^2}{2} g''(s)\, ds.$$

(c) Étudier alors la convergence de $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en fonction de la position de $x > 0$ par rapport au réel $\sigma$. On précisera les limites éventuelles en fonction de $\sigma$.

**25.** On pose $P_n(X) = X^4 - nX^3 - nX^2 - nX + 1$, pour tout entier $n \geqslant 1$.

(a) Montrer que $P_n$ admet des racines réels, pour tout entier $n \geqslant 1$. On pose $a_n$ la plus grande d'entre elles, pour tout entier $n \geqslant 1$.

(b) Déterminer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n^2}$.

**26.** (a) Étudier pour $a$ réel, la suite
$$u_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1 + \frac{ka}{n^2}\right).$$

(b) Reprendre la même étude pour $a$ complexe.

(c) Pour un réel $a > 0$, donner un développement asymptotique à deux termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(d) Reprendre la même étude pour la suite à valeurs dans $M_p(\mathbb{C})$
$$M_n(A) = \prod_{k=1}^{n}\left(I_p + \frac{k}{n^2}A\right), \quad (A \in M_p(\mathbb{C})).$$

**27.** On considère une suite complexe bornée $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On suppose la suite $\left(z_n + \frac{1}{2}z_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente dans $\mathbb{C}$. Étudier la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**28.** On considère un réel $\alpha$ tel que $|\alpha| < 1$; à tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on associe la suite $y_0 = x_0$ et $y_n = x_n - \alpha x_{n-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même nature.

**29.** On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\, dt.$$

Montrer que l'on a : $u_n \sim \dfrac{\ln 2}{n}\cdot$

**30.** Déterminer la limite de la suite

$$u_n = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t+\cdots+t^n}}.$$

**31.** Donner un équivalent de la suite

$$u_n = \int_0^1 \frac{nx\sin x}{1+n^3x^3}\, dx.$$

**32.** Donner un équivalent de la suite : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^s,\ s \geqslant -1.$

**33.** Donner un équivalent de la suite :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{\sqrt[3]{n^3+k^3}}.$$

**34.** On considère $p \in \mathbb{N}$. Discuter la convergence de la suite : $u_n = \sin(\pi(\sqrt{p})^n)$.

**35.** Donner une CNS sur le réel $\theta$ pour que la suite $\big(\cos(n\theta)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

**36.** Soit des nombres complexes distincts $x_1, \cdots, x_p$. On considère des complexes $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ et on définit la suite de terme : $u_n = \lambda_1 x_1^n + \cdots + \lambda_p x_p^n$.

(a) On suppose que pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $|x_k| \geqslant 1$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Démontrer que : $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$.

(b) On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Établir que

$$(\forall\, k \in [\![1,p]\!]), \qquad \lambda_k \neq 0 \Longrightarrow |x_k| < 1$$

(c) Donner une CNS pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.

**37.** On considère des complexes $\lambda_0, \cdots, \lambda_p$ et $\theta_0, \cdots, \theta_p$ des réels tels que $1 = \theta_0 > \theta_1 > \cdots > \theta_p \geqslant 0$. On pose

$$u_n = \sum_{k=0}^{p} \lambda_k \cos(n\theta_k\pi).$$

Démontrer que

$$\big(\lim_{n\to+\infty} u_n = 0\big) \Longrightarrow \big(\lambda_0 = \cdots = \lambda_p = 0\big).$$

**38.** On pose pour tout entier $n \geqslant 1$

$$G_n = \left(\binom{n}{0} \times \binom{n}{1} \times \cdots \times \binom{n}{n}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

Étudier la suite

$$u_n = \sqrt[n]{G_n}.$$

**39.** On considère un complexe $z$. Montrer que

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^z.$$

**40.** On considère la suite à valeurs complexes définie pour $n \geqslant 1$ par : $z_n = \displaystyle\prod_{p=1}^{n}\left(1+\frac{i}{p}\right).$

(a) Montrer que $(|z_n|)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel $\rho > 0$.

(b) Montrer que $(z_n)_{n\geqslant 1}$ diverge.

(c) Montrer que l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est le cercle centré à l'origine de rayon $\rho$.

**41.** On considère une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $(\forall\, n \in \mathbb{N}),\quad u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si elle possède une unique valeur d'adhérence.

**42.** On considère une fonction continue $f : [0,1] \to [0,1]$ puis la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0,1]$ et : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si : $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

**43.** (a) On considère une fonction continue $f : [0,1] \to [0,1]$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_0 \in [0,1]$ et :

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}), \quad u_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(u_k),$$

converge vers un point fixe de $f$.

(b) Que peut-on dire si $f$ n'est pas continue ?

**44.** Etudier les suites récurrentes suivantes

(a) $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n},\ u_0 \geqslant 0$.

(b) $u_{n+1} = \frac{1}{2}(3-u_n^2), 0 < u_0 < 1$.

(c) $u_{n+1} = \cos u_n, u_0 \in \mathbb{R}$.

(d)

$$u_{n+1} = \frac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{u_n}+\sqrt{1-u_n}},\ u_0 \in [0,1].$$

(e)

$$u_{n+1} = \frac{3}{2u_n^2+1},\ u_0 \in \mathbb{R}. \qquad \text{(On pourra s'aider d'un logiciel de calcul formel)}$$

(f)

$$u_{n+1} = a + b - \frac{ab}{u_n},\ u_0 = a+b,\ 0 < a \leqslant b.$$

**45.** On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $x_0 = x > 0$ et $x_{n+1} = x^{x_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

(b) Démontrer l'existence d'un réel $x > 0$ tel que : $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$.

(c) Existe t-il un tel réel $x > 0$ tel que : $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$ ?

**46.** On donne la suite complexe récurrente $z_0 = \rho e^{i\theta}$ et

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}), \qquad z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|),$$

avec $\rho > 0$ et $\theta \in ]-\pi,\pi]$. Déterminer la limite de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**47.** Donner un équivalent de la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}), \qquad u_{n+1} = \arctan(u_n).$$

**48.** On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par la récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_0 = a > 0, \quad u_1 = b > 0, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n u_{n-1}}.$$

Étudier cette suite et préciser en un équivalent.

**49.** Donner un équivalent de la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}), \qquad u_{n+1} = u_n + e^{-u_n^2}.$$

**50.** (a) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}), \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}\cdot$$

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et donner en un équivalent.

(c) Vérifiez à l'aide d'un logiciel de calcul formel que pour $u_0 = 5$, on a

$$45 < u_{1000} < 45,1.$$

(d) Établir rigoureusement ce résultat.

**51.** (a) Montrer que pour l'entier $n > 1$, l'équation

$$x - n\ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right) = 0$$

possède une unique solution contenue dans $]-2,-1[$, notée $x_n$.

(b) Montrer que la suite $(x_n)_{n>1}$ tend vers $-2$.

(c) Préciser un équivalent de la suite $(\sigma_n)_{n>1}$ de terme général

$$\sigma_n = x_n + 2.$$

(d) Démontrer que $x_n$ admet un développement limité à tout ordre en $\frac{1}{n}\cdot$

(e) On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = -\frac{4}{3}$ et :

$$(\forall\, n \geqslant 3), \quad a_n = -\frac{1}{n+1}\left(2(n-1)a_{n-1} + \sum_{p=1}^{n-2}(pa_p + (p+1)a_{p+1})a_{n-p}\right).$$

Faire avec le logiciel une implémentation itérative de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et vérifier sur quelques valeurs de l'entier $n > 1$, la relation :

$$x_n = n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k a_k}{(n+1)^k}\cdot$$

(f) Que peut-on conjecturer sur la monotonie de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?

**52.** (a) Montrer que sur chaque intervalle $I_n = \left]\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi, \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right[$, l'équation

$$(E_n) \qquad \tan x = x$$

admet une solution unique notée $x_n$, où $n$ désigne un entier $\geqslant 1$.

(b) Démontrer que l'on a

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

où $a, b$ et $c$ sont des réels à déterminer.

(c) Montrer alors que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{x_n^2}$ converge. Que peut-on raisonnablement conjecturer sur sa somme, à l'aide de Python ?

**53.** On se fixe un réel $0 < \lambda < 1$ et pour un entier $n \geqslant 1$, on considère sur $\mathbb{R}^+$ l'équation

$$(E_n) \qquad e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = \lambda.$$

(a) Montrer que $(E_n)$ admet une solution unique notée $a_n$.

(b) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante.

(c) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $+\infty$.

(d) Démontrer en fait que $a_n \sim n$.

(e) On pose $\lambda = \dfrac{1}{2}\cdot$ Que donne le logiciel sur le comportement de la suite $(a_n - n)_{n\geqslant 1}$ ?

**54.** Pour tout $n \geqslant 1$, on considère sur $\mathbb{R}^+$ l'équation définie implicitement par

$$(E_n) \quad x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = 0.$$

(a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $(E_n)$ admet une unique solution unique notée $u_n$.

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $\dfrac{1}{2}\cdot$

(c) Illustrer ce résultat à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

(d) Donner un développement asymptotique avec trois termes significatifs de $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

(e) Vérifier brièvement à l'aide d'un logiciel du programme la relation, pour $n \geqslant 1$

$$u_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k(n+1)+1} \times k} \binom{k(n+1)}{k-1}.$$

**55.** On considère pour un réel $a > 0$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ la fonction

$$\varphi_n(x) = \frac{a}{x} + \frac{1}{x-1} + \cdots + \frac{1}{x-n} = \frac{a}{x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-k}\cdot$$

(a) Étudier sur $\mathbb{R}$ le nombre de solutions de l'équation

$$(E_\lambda) \qquad\qquad \varphi_n(x) = \lambda$$

où $\lambda$ désigne un réel.

(b) On se fixe un réel $\lambda > 0$. Montrer l'existence d'une unique racine réelle $x_n$ dans $]n, +\infty[$ à l'équation $(E_\lambda)$.

(c) Mettre en évidence à l'aide du logiciel la convergence de la suite $\left(\dfrac{x_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}\cdot$

(On pourra essayer avec $a = \dfrac{1}{2}$ et $\lambda \in \{\ln 2, \ln 3\}$)

(d) Montrer que lorsque $n$ tend vers l'infini, on a :

$$x_n \sim \frac{n}{1 - e^{-\lambda}}\cdot$$

(e) Donner un équivalent de la suite :

$$y_n = x_n - \frac{n}{1 - e^{-\lambda}}\cdot$$

**56.** On se fixe $a \in \mathbb{Z}$ et on considère $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $x_0 = 4, x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 3$ et :

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}), \quad x_{n+4} = -x_{n+2} + x_{n+1} + a x_n.$$

Démontrer que pour tout entier premier $p$, l'entier $p$ divise $x_p$.

# Indications pour quelques exercices

**3.**

a) Montrer par un raisonnement par l'absurde que ces suites sont bornées.

b) En déduire que $u_n^3 - v_n^3 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et conclure.

**4.** La suite $v = \arctan(u)$ permet de se ramener au cas où $u$ est bornée. Le théorème de B-W permet de se ramener au cas où $u$ est convergente, puis par suite où $u$ est de limite nulle.

**5.** On pourra considérer les suites : $\left((u_n - a)^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left((u_n - b)^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

**7.** On pourra traiter d'abord le cas : $\beta = 0$ : dans ce cas, on utilise le lemme de Césaro.
Le cas général est facile alors.

**8.** On peut commencer par le cas $\alpha = 1$.

(a) Montrer que : $\binom{n}{k} \geqslant \binom{n}{2}$, pour tout $2 \leqslant k \leqslant n-2$.

(b) En déduire que : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$.

(c) Pour $\alpha > 0$, ce qui précède se généralise.

(d) Pour la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, utiliser : $v_n \geqslant \displaystyle\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{\binom{n}{p}^{\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} N+1$, pour tout entier $N$.

**9.** Utiliser la constante d'Euler vue en cours : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

**10.** On pourra considérer $\xi$, issue de l'équation caractéristique associée à la suite récurrente $u$.

**12.** Établir que l'on finit par trouver deux termes consécutifs négatifs.

**13.**

1) On pourra étudier la monotonie de ces suites, en exploitant : $||a| - |b|| \leqslant |a-b|$, lorque $a$ et $b$ sont réels.

2) Commencer par le cas : $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{Z}^3$ et exploiter le fait que si ce triplet est remplacé par $(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0)$, les trois suites sont respectivement égales à $\lambda x, \lambda y$ et $\lambda z$, pour tout $\lambda \geqslant 0$.

3) On trouve les réels : $0, \mathrm{PGCD}(a,b)$ et $\mathrm{PGCD}(a,b)$. Il suffit de traiter le cas où $a$ et $b$ sont premiers entre eux.

5) On trouve le réel $\mathcal{T}(x)$, où $\mathcal{T}(x)$ est la fonction de Thomae, définie par : $(\forall\, x \in \mathbb{R})$,

$$\mathcal{T}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \text{si } x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ est sa représentation irréductible} \\ 0 & \qquad\qquad \text{si } x \text{ est irrationnel.} \end{cases}$$

**18.** C'est plus un exercice d'informatique.

(a) La réponse est non. Avec l'ordinateur, on voit (laborieusement) que 17 est le premier indice $n$ où $u_n$ est non entier.

(b) La réponse est encore non. On plante rapidement l'ordinateur (double le nombre de chiffres à chaque étape) par la technique précédente. En travaillant dans $\mathbb{F}_p$, pour $p$ premier, la suite est plus facile à étudier. On constate que $u_{59}$ n'est pas entier.

**19.** Remarquer que : $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = p_n$ est un entier pair, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**20.** On considère $a < b$ des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit un réel $c \in ]a, b[$.
On veut établir que $c$ est une valeur d'adhérence. Introduire un réel $0 < \varepsilon < \min(c-a, b-c)$ et un entier $N$ tel que : $(n \geqslant N) \Longrightarrow |x_{n+1} - x_n| \leqslant \varepsilon$.

**22.**

(a) Faire entrer $n$ dans la somme et exploiter la relation : $\mathrm{ch}(x) - 1 = 2\ \mathrm{sh}^2(x/2)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

(b) Trouver une majoration fine de $|\mathrm{sh}(t) - t|$ par l'inégalité des accroissements finis et conclure.

**23.** Mettre $b$ en facteur, passer au logarithme et utiliser une comparaison à l'aide d'une intégrale (le vrai outil étant la fonction Gamma d'Euler).

**24.** Passer aux logarithmes et penser aux sommes de Riemman.

**25.** Montrer que : $n \leqslant a_n \leqslant n+1$, pour $n \geqslant 1$.

**27.** Si la suite converge, sa limite est $2/3$. Montrer que si elle diverge, on peut faire apparaître une suite de valeurs d'adhérences, qui est non bornée, sauf si elle est initialisée à $2/3$.

**28.** Introduire la suite $(y_n/\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et étudier les résultats sur les séries, propre à la sommation des relations d'équivalents et de prépondérence.

**29.** Faire une IPP ou faire le changement de variable : $x = t^n$, puis appliquer le théorème de CVD.

**30.** Montrer que : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t}\, dt = 2/3$.

**31.** Faire un changement de variable $t = nx$ et utiliser la CVD.

**36.** Pour se faire une idée : on peut commencer par le cas $p = 3$. Si $a, b$ et $c$ sont des complexes distincts tels que : $a^n + b^n + c^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors $|a| < 1, |b| < 1$ et $|c| < 1$.
Pour cela on pose $u_n = a^n + b^n + c^n$, et on exprime par les formules de Cramer $a^n$ en fonction de $u_n, u_{n+1}$ et $u_{n+2}$. On peut adapter cette technique au cas général.

**39.** On vérifie d'abord le résultat avec le module, puis on écrit : $1 + \dfrac{z}{n} = \rho_n e^{i\theta_n}$, pour $n$ assez grand.

**40.**

(a) Montrer que $(|z_n|)_{n\geqslant 1}$ est croissante majorée. On pourra utiliser : $1 + x \leqslant e^x$, pour $x \in \mathbb{R}$.

(b) Exploiter la relation : $1 + \dfrac{i}{p} = \left(1 + \dfrac{1}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_p}$, où $\theta_p = \arctan(1/p)$.

**41.** On note $a$ son unique valeur d'adhérence. On montre alors que $u$ est bornée.
Introduire pour cela des réels : $\alpha < a < \beta$ puis $M > 0$ tels que : $f([\alpha, \beta]) \cup [\alpha, \beta] \subset [-M, M]$.

**42.** Remarquer que les valeurs d'adhérence sont des points fixes de $f$ et que leur ensemble constitue un intervalle.

**43.**

(a) Remarquer que les valeurs d'adhérence sont des points fixes de $f$ et que leur ensemble constitue un intervalle.

(b) Prendre pour $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$.

**45.** Mener l'étude de la fonction : $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ sur $]0, +\infty[$.

**46.** Exprimer $\rho_n$ et $\theta_n$ dans l'écriture trigonométrique : $z_n = \rho_n e^{i\theta_n}$.

**49.** On pourra introduire : $v_n = \dfrac{e^{u_n^2}}{u_n}\cdot$

**50.** Élever la relation de récurrence au carré.

**52.** Pour la question (b), exploiter la relation : $x_n = \tan(x_n) = \tan(x_n - n\pi)$ et donc :

$$x_n - n\pi = \arctan(x_n).$$

**54.** Pour la question (b), montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante et que l'on a :

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}^*), \quad u_n^{n+1} - 2u_n + 1 = 0.$$

**55.** (d) On pourra étudier la suite $\big(\varphi_n(n\alpha)\big)_{n\geqslant 1}$, en faisant apparaître une somme de Riemann, où $\alpha > 1$.

**56.** Trouver une matrice $A \in M_4(\mathbb{Z})$ telle que : $x_n = \mathrm{tr}(A^n)$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
Se servir, en travaillant dans $\mathbb{F}_p$, que : $\mathrm{tr}(A^p) \equiv \mathrm{tr}(A) \pmod p$, pour tout entier premier $p$.